


IZZOFALCONE

TRAITÉ

DU

DESSIN GÉOMETRIQUE.

TRAITÉ DU DESSIN GÉOMÉTRIQUE (TEXTE).

Paris. — Impr. de Lacour et Comp., rue St Hyacinthe St-Michel 33

TRAITÉ

DU

DESSIN GÉOMÉTRIQUE

OU

EXPOSITION COMPLÈTE DE L'ART

DU

DESSIN LINÉAIRE,

DE LA CONSTRUCTION DES OMBRES ET DU LAVIS,

à l'usage des Industriels, des Savants et de ceux qui veulent s'instruire sans le secours de maîtres

ET

Spécialement destiné pour l'enseignement dans les Écoles royales d'Artillerie prussienne,

PAR **M. BURG,**

CAPITAINE D'ARTILLERIE,

Professeur à l'École Royale d'Artillerie et du Génie.

2me édition, complétement refondue et augmentée.

traduit de l'allemand

PAR LE Dr REGNIER.

TEXTE.

PARIS.

J. CORRÉARD, ÉDITEUR D'OUVRAGES MILITAIRES,

Rue de l'Est, 9.

1847

TABLE DES MATIÈRES.



Troisième partie.

De la distribution de la lumière et des ombres sur les dessins.

Appendice.

FIN DE LA TABLE.

Paris. — Imprimerie Lacour et Comp. rue St-Hyacinthe-St-Michel, 33.

INTRODUCTION.

C'est à l'aide des *sens*, que l'homme constate l'existence des objets extérieurs avec lesquels il se trouve en rapport, et parmi les sens, c'est celui de *la vue* qui sans contredit réveille en lui le plus grand nombre d'idées, car aucun des autres ne peut produire autant de sensations à la fois, ou agir à des distances aussi considérables.

Il en résulte aussi, que l'organe de la vue contribue plus qu'aucun autre au perfectionnement des connaissances, car c'est lui surtout qui nous donne une idée de l'étendue, de la forme, de la couleur et de la position des corps.

Mais veut-on conserver ou reproduire les impressions reçues par les yeux, pour prendre soi-même ou communiquer à un autre une connaissance plus intime des faits constatés au moyen de la vue, le besoin *de dessiner* se fait aussitôt sentir, par la raison qu'une description verbale ne peut traduire ces impressions que d'une manière obscure et incomplète, et qu'il en résulte par conséquent plus ou moins d'obstacles à l'exercice du jugement. C'est à cette cause qu'il faut attribuer les nombreuses applications que l'on fait du dessin dans la vie pratique, les arts et les sciences, et il faudra l'admettre comme tout-à-fait indispensable dans l'état actuel des connaissances humaines, si l'on songe combien de fois on est obligé de soumettre à l'examen et au jugement des autres, soit des objets déjà existants, soit des corps qui ne se trouvent encore que dans l'imagination.

Ainsi, l'on demande généralement que l'image d'un objet remplace entièrement aux yeux cet objet lui-même, abstraction faite de la matière dont il est formé; mais si l'on considère en même temps la grande diversité du monde de corps qui nous entoure, et celle des fins qu'on se propose en reproduisant leur image, on reconnaîtra qu'il doit exister aussi des différences essentielles dans les procédés de représentation qui découlent de ces divers besoins, et dans les méthodes d'enseignement destinées à les développer.

Parmi tous ces genres de dessin, ceux qui servent à faire atteindre *un but technologique* (1) sont incontestablement les plus utiles dans la vie pratique; c'est à eux aussi que l'on a recours le plus souvent, et il serait facile de démontrer que l'étude des règles qui les constituent est indispensable à l'artiste, à l'artisan et à l'industriel, comme aussi à l'ingénieur et à l'officier des armes spéciales.

L'art du dessin géométrique (géométrie représentative) est, par conséquent, cette partie de l'art en général qui a pour objet l'exécution de semblables dessins.

Il enseigne comment on représente sur un plan l'image des objets qui se trouvent dans l'espace, en tant qu'il s'agit du but énoncé ci-dessus, et il montre aussi comment, au moyen d'une telle image, on peut reconnaître et conclure la véritable étendue, la forme et la position des objets.

Il est aussi appelé *géométrie descriptive*, parce qu'il apprend à rendre tellement bien l'image des objets, et que par cette image ils se trouvent *décrits* d'une manière si complète et si claire, que tous ceux qui sont initiés à ce genre de dessin peuvent les reconnaître et les comprendre.

Ainsi, les dessins qui ont *un but technologique* sont exécutés

---

(1) La technologie est la science des arts industriels.

d'après les principes de la *géométrie représentative*, et ils reçoivent les dénominations de dessins architectoniques, dessins de machines, dessins d'artillerie, dessins de fortifications, et ainsi de suite, suivant les différents cas.

Tantôt on se contente de représenter par de simples *lignes* les différentes formes des objets à produire, l'on a alors des *dessins linéaires;* tantôt ces dessins sont encore *lavés*, c'est-à-dire éclairés suivant les lois de la nature, au moyen de couches et de teintes d'encre de Chine, desquelles il résulte sur les surfaces une distribution de lumière et d'ombre, conformément à ce qui existe en réalité, ou du moins à ce qui doit exister dans les mêmes circonstances sur les objets proposés.

Lorsqu'un dessin géométrique ne doit être composé que de lignes, il n'y a à consulter que les règles ordinaires de la géométrie descriptive, mais s'il faut, au moyen du lavis, y ajouter des ombres pour obtenir plus de ressemblance avec la réalité; alors il ne suffit plus d'une simple imitation à l'aide d'observations recueillies dans la nature, il devient nécessaire d'appeler à son secours les règles de l'optique qui s'y rapportent, pour construire et établir les ombres d'après ces lois et celles de la géométrie, il en résulte qu'un dessin linéaire est bien plus facile à exécuter qu'un lavis (1).

Il y a *cinq manières* d'envisager l'étude du dessin technologique; elles dépendent du but qu'on se propose, et il est facile d'en conclure si l'on peut obtenir le résultat qu'on se propose avec un dessin linéaire, ou s'il est encore nécessaire de laver.

I. — On peut dessiner les objets avec l'intention de faire

---

(1) Lorsque, dans un dessin linéaire, on a recours à l'emploi des couleurs pour faire reconnaître la matière dont est formée telle ou telle partie de l'objet proposé, on ne fait pas encore un dessin lavé, car il faut absolument pour cela l'intervention des ombres et de la lumière.

servir le dessin *à les exécuter réellement.* Pour atteindre ce but, le dessin doit être tel que celui qui est chargé de l'exécution, artiste, artisan ou industriel, puisse en déduire la grandeur et l'état véritable du corps représenté, y trouver toutes les mesures nécessaires, et en conclure avec clarté, facilité et précision les formes de chacune de ses parties, sans être embarrassé par le grand nombre de figures et de coupes.

Tout ornement inutile, toute autre partie qui ne sert qu'à faire paraître le dessin plus compliqué, doit être entièrement supprimé; en un mot, l'image de l'objet doit être telle que l'idée de celui qui exécute en ressorte claire et distincte.

Il est inutile d'ajouter qu'il faut examiner avec soin quelle doit être la disposition générale du dessin, quel doit être le nombre des plans, élévations et coupes, pour qu'il soit bien intelligible, et qu'on puisse travailler avec exactitude.

Ici, dans la plupart des cas, un dessin linéaire est bien ce qui convient; cependant il peut quelquefois ne pas être suffisant, surtout quand il faut représenter l'objet au moyen de plusieurs projections extérieures et de plusieurs coupes; il peut se faire même qu'il en résulte certains inconvénients, comme il sera démontré dans la suite.

II. — On peut avoir à dessiner un objet déjà exécuté, ou bien qui n'existe encore que dans l'imagination, avec l'intention *d'en reproduire aux yeux une image aussi claire que possible*, quand les circonstances ne permettent pas de faire voir l'objet lui-même (c'est, par exemple, le cas des figures qui appartiennent au texte d'un ouvrage); car, généralement, on apprend mieux au moyen d'un seul coup d'œil jeté sur un dessin que par une description quelque développée qu'elle soit.

Ici, dans la plupart des cas, et pour des raisons que nous donnerons, un dessin linéaire est insuffisant, surtout quand il s'agit d'un objet inconnu; il est alors plus opportun et souvent indispensable de recourir au lavis pour distribuer convenablement l'ombre et la lumière sur le dessin, et quelquefois même

de se servir des couleurs pour faire reconnaitre d'une manière plus prompte et plus claire les matériaux dont se composent les différentes parties du corps représenté.

III. — Souvent on dessine un objet pour parvenir à *le connaître soi-même d'une manière plus parfaite et plus intime.* Par le simple aspect, on n'obtient le plus souvent que des notions générales et une connaissance superficielle, tandis que par le dessin des corps, dessin qui consiste ici en plans, élévations et coupes, on apprend non-seulement à connaître leur état extérieur, mais encore toute leur disposition intérieure et la construction de chacune des parties, de manière à pouvoir s'en faire, dans tous les cas possibles, des notions complètes ou au moins bien claires. On est pour ainsi dire forcé par le dessin de pénétrer dans l'organisme de l'assemblage, ce qui ne peut jamais résulter de l'aspect extérieur.

Un dessin linéaire suffit parfaitement pour procurer ce résultat.

IV. — On doit *pouvoir dessiner soi-même*, ou au moins avoir à cet égard *une connaissance théorique*, quand on veut comprendre et bien raisonner un dessin.

Il sera difficile, à celui qui ne s'occupe pas lui-même de dessin, ou qui au moins ne l'a pas appris théoriquement, de comprendre d'une manière convenable un dessin géométrique, de former en imagination un tout au moyen des différents points de vue, de saisir, d'après l'image, l'idée de celui qui a exécuté, en un mot, d'apprendre à connaître l'objet dessiné aussi bien dans son ensemble que dans ses détails. Au contraire, c'est chose toute simple pour le dessinateur, et comme connaisseur, il pourra facilement saisir l'ensemble, le comprendre et le raisonner.

Mais pour pouvoir atteindre ce but, il ne suffit pas de savoir exécuter un dessin linéaire, il faut encore être initié aux lois de la distribution de la lumière qui règlent la position des rayons lumineux sous différents angles; il faut, par consé-

quent, savoir laver exactement un dessin, ou au moins posséder suffisamment la théorie sous le rapport des projections et des ombres, pour pouvoir en raisonner comme connaisseur.

V. — Outre les avantages indiqués dans les quatre paragraphes ci-dessus, le dessin en procure encore d'autres à ceux qui l'étudient, et ils ne sont pas sans importance.

En effet, comme l'étude des mathématiques en général produit une influence remarquable sur le développement de l'intelligence, en même temps qu'elle accroît le cercle des connaissances, de même l'art du dessin, en dehors de ses applications particulières, agit encore d'une manière avantageuse sur *la puissance d'imagination* de l'homme, qui reçoit de lui plus de force et de vivacité, parce que le travail qu'il exige la maintient dans une activité continuelle (comme par exemple quand on s'occupe du dessin des coupes).

Il le met en état de se représenter d'une manière plus claire et plus exacte les objets de la nature et des arts qui l'environnent, et de les décomposer dans son esprit en leurs différentes parties; il contribue encore, entr'autres effets certains, à délopper le goût, parce qu'il réveille, vérifie et exerce le sentiment de la beauté des formes, de la symétrie et de la régularité des proportions; il règle son jugement, sur tout ce qui lui apparaît dans le monde de corps dont il est entouré.

Enfin, les constructions qu'il faut exécuter dans l'art du dessin géométrique sont éminemment propres à faciliter l'étude de la géométrie analytique.

Mais avant de représenter l'image d'un objet dans un but technologique déterminé, il est nécessaire de se faire à soi-même une représentation claire et complète de cet objet, qu'il soit du reste le résultat des propres conceptions, ou qu'il soit donné par un dessin, par une description, ou par une exécution réelle. Pour y parvenir, dans l'une quelconque des circonstances énoncées ci-dessus, il faut recourir soit à l'examen d'autres dessins déjà terminés, soit à une description de l'ob-

jet jointe au détail de ses mesures, soit à un croquis ou premier dessin fait sur place.

Il ne faut pas compter sur une description verbale, car il serait certainement trop pénible d'embrasser, de retenir et de reproduire toutes les mesures et toutes les proportions, quelque peu compliquées qu'elles puissent être.

Au résumé, pour reproduire un dessin géométrique, il faut recourir aux moyens ci-après :

1° A la *copie* de dessins déjà exécutés, en conservant ou en changeant les mesures ou côtes;

2° A des *mesures* données pour des *formes* déjà décrites, ou choisies arbitrairement, ou déterminées par le but qu'on se propose et le besoin, sans avoir un original sous les yeux.

3° Aux mesures obtenues en faisant *un levé* ou *croquis*.

Nous allons maintenant enseigner dans ce qui va suivre, comment il faut exécuter *les dessins géométriques*, conformément à ces diverses hypothèses.

TRAITÉ

DU

DESSIN GÉOMÉTRIQUE.

PREMIÈRE PARTIE.

DE L'EMPLOI DES INSTRUMENTS ET OBJETS NÉCESSAIRES POUR LE DESSIN, ET DES CONNAISSANCES PRÉLIMINAIRES INDISPENSABLES POUR CET ART.



CHAPITRE Ier.

Du tracé des lignes droites et courbes, des perpendiculaires et des parallèles.

§ 1er. — Le *Point* d'après la définition admise en mathématiques est envisagé comme n'ayant point d'étendue, et quoiqu'il soit impossible, même avec les instruments les plus délicats, de produire un pareil point mathématique, il faut néanmoins que sa représentation se rapproche le plus possible de la définition précédente et qu'il soit fait aussi petit et aussi fin que possible. On évitera de faire dans un dessin des points trop grands, si au lieu de fixer le compas dans une position perpendiculaire au papier, on lui donne une certaine inclinaison, telle que sa tête se dirige légèrement vers la droite du dessinateur, pour que les points produits soient plutôt des empreintes faites sur le papier que des piqûres; il faut enfin prendre d'autant plus de précautions dans le maniement du compas que par des points trop grands, un dessin perd non seulement de sa précision mais encore de sa beauté.

§ 2. — Si le point se meut dans une direction quelconque, *il décrit une ligne.*

Par conséquent, la ligne mathématique n'a *que la longueur,* et c'est pour cela que sa représentation doit être, conformément à cette définition, aussi fine que possible et présenter partout la même *largeur*, puisque le point qui la décrit n'a pas varié de grandeur dans son parcours. Mais en général un dessin gagne beaucoup sous le rapport de la beauté et de la clarté, lorsque la largeur des lignes se règle d'une certaine manière d'après l'échelle qui a servi à l'exécution du dessin, c'est-à-dire lorsque ces lignes ont avec le dessin un rapport tel, que quand l'échelle augmente ces lignes sont plus fortes, et quand l'échelle diminue elles deviennent plus petites.

C'est surtout à l'aide des lignes que l'on peut reproduire les formes des objets qu'il s'agit de figurer.

§ 3. — Si le point conserve dans son trajet la direction qu'il a prise en commençant, sans en dévier en aucun sens, il décrit alors *une ligne droite;* on se sert pour tracer ces lignes droites avec l'encre de Chine, d'un instrument appelé *tire-ligne.* Mais pour que le trait que cet instrument doit produire soit beau et pur, il est nécessaire de tenir celui-ci dans une position telle qu'il forme avec la surface du papier un angle à peu près droit, et de le conduire doucement avec une pression toujours égale sans quitter le rebord de la règle. Avec cela, il faut que l'encre ne soit pas trop épaisse, soit fraîchement broyée et surtout *de bonne qualité.* Le tracé de belles lignes droites n'est pas aussi facile qu'on pourrait le croire de prime abord, et il exige déjà un certain degré d'habitude et de pratique, d'autant plus que la beauté et la précision d'un dessin dépendent beaucoup *du tracé.*

§ 4. — Lorsqu'un point se meut dans un plan autour d'un point fixe, de telle sorte que la ligne qu'il décrit soit constamment à la même distance du point qui est immobile, la ligne qu'il décrit est appelée *circonférence de cercle.*

Pour décrire une circonférence, il faut saisir légèrement la tête du compas, le maintenir autant que possible dans une position verticale, de telle sorte que ni la branche qui occupe le centre, et encore moins celle qui trace la ligne, ne forment

un angle trop aigu avec la surface du papier ; afin donc d'éviter cet inconvénient, on dispose la branche articulée de telle manière que sa pointe vienne poser autant que possible perpendiculairement à cette surface. Il faut aussi agir avec précaution, lorsqu'il s'agit de tracer plusieurs circonférences concentrique.

Pour éviter deproduire un trou trop profond au point qui doit servir de centre, on emploi souvent avec avantage un petit morceau de corne ou de papier carton qu'on fixe légèrement en ce point avec un peu de colle à bouche, et qu'on peut ensuite facilement enlever lorsque le travail est achevé, sans qu'il

Le tracé de ces lignes est en général plus facile que celui

laisse de traces.

des droites pour les commençants, et ils y réussissent mieux, car le tracé de ces dernières réclame une main ferme et exercée pour que leur direction soit toujours la même, direction qui est déterminée par deux ou plusieurs points et par la règle qui doit constamment être maintenue ferme et immobile.

Dans le tracé du cercle, au contraire, cette direction s'obtient d'elle-même par l'écartement des branches du compas, et ne se modifie pas durant tout le temps que s'opère la tracé, pourvu qu'on imprime à la tête du compas un mouvement convenable, et qu'il soit conduit avec précision et d'une main sûre.

§ 5. — Outre les circonférences, on rencontre encore dans le dessin, une infinité d'autres *lignes courbes* offrant des formes et des courbures très-variées qui naturellement ne peuvent être dessinées ni à l'aide du compas, ni celui de la règle, et pour le tracé desquelles il est nécessaire de posséder une certaine adresse manuelle. Le tracé correct de ces lignes n'est pas chose à négliger, parce qu'il n'arrive que trop souvent de voir un dessin, d'ailleurs bien fait, atténué par le peu d'habitude du dessinateur à exécuter les lignes courbes, bien que toutes les autres soient belles et exactes.

Pour le tracé des lignes courbes à l'encre de Chine, on se sert de plumes d'argent et d'acier, ou à leur défaut de plumes ordinaires très-dures, mais qui doivent avoir, comme pour le dessin de *plans*, une pointe fine avec une fente longue à proportion. Les plumes de corbeau conviennent le mieux à ce tra-

vail, cependant on peut aussi se servir des plumes à écrire ordinaires.

On trace d'abord avec exactitude les lignes courbes à l'aide d'un crayon, puis on les passe à l'encre en veillant à ce qu'elles aient partout la même largeur, qu'elles cheminent dans la direction voulue, sans solution de continuité, ni inégalité dans le trait, et enfin, lorsqu'il s'agit de courbes parallèles, qu'elles soient, dans tous leurs points, également distantes.

On se servira souvent avec beaucoup d'avantage, pour le tracé des lignes courbes, du *tire-ligne* et de la *règle courbe* (dite *pistolet*). Dans l'emploi de cette règle, on doit surtout veiller à ce que l'arête corresponde parfaitement avec la ligne courbe tracée d'abord au crayon, et pour remplir ce but, on devra choisir, selon la courbure de la ligne, tantôt une partie, tantôt une autre, attendu que cette règle présente des courbures de diamètres très-variés, et des parties convexes aussi bien que des parties concaves.

§ 6. — Lorsqu'il s'agit de dessiner avec le plus d'exactitude possible une ligne offrant une courbure déterminée, le tracé à main libre ne suffit plus. Dans ce cas, il est bien préférable d'avoir recours au compas pour fixer la position d'un certain nombre de points principaux, à l'aide desquels la forme de la ligne que l'on veut figurer se trouve suffisamment arrêtée, puis de réunir à la main libre tous ces points ainsi trouvés. Veut-on, par exemple, copier une ligne courbe A O H, et ignore-t-on si la courbure de cette ligne est irrégulière ou formée d'une suite d'arcs de cercles, ou, dans ce dernier cas, ne connaît-on pas le lieu de leurs centres, on procède ainsi qu'il suit : on trace d'abord une ligne droite X, Y. dans une position quelconque près de A O H. On marque sur cette ligne, à des distances convenables, les points A, B, C, D, E, F, et G, et on élève en ces points des perpendiculaires à X Y, puis on mène une seconde droite $x\,y$, on prend sur celle-ci les distances ab = AB; ac = AC; ad = AD; aux points a, b, c, d, e, etc., on élève aussi des perpendiculaires à $x\,y$, et l'on prend sur celles-ci ah = AH, bi = BI, ck = CK, dl = DL, em = EM, fn = FN, go = GO, bp = BP, cq = CQ, dr = DR, es = ES, ft = FT.

Par les points ainsi déterminés, on trace au crayon une ligne courbe *a p q r s t o n m l k i h*, et l'on a ainsi une ligne égale à A O H ; on peut alors la tracer soit à la main libre, ou faire usage de la règle courbe et du tire ligne.

Remarque. Si l'on s'est servi d'une échelle proportionnelle pour établir les distances des points sur la ligne *x y*, il est facile de comprendre que la courbe *a o h* ne sera plus égale à A O H, mais lui sera semblable.

§ 7. — Il est d'ailleurs évident qu'on aurait pu faire usage d'un plus grand nombre de points sur les lignes X Y, et *x y* pour la détermination de la courbe, et qu'il n'était pas tout-à-fait nécessaire que ces lignes X Y et *x y* touchassent les courbes ; car, quoique étant plus éloignées, elles auraient pu tout aussi bien servir à déterminer exactement les points nécessaires. Dans ce cas, les lignes *a h*, *b i*, *b p*, *c k*, etc., eussent donc été d'autant plus longues ; et en même temps on aurait dû mesurer une certaine distance de A et *a* jusqu'aux courbes. De même il n'est pas nécessaire que les lignes qui ont été menées par les différents points de X Y et *x y* soient toujours perpendiculaires à celles-ci ; on pourrait aussi leur donner une certaine inclinaison, mais alors il serait nécessaire que l'angle d'inclinaison fût de part et d'autre identiquement le même.

En géométrie on donne le nom *d'abscisses* aux distances comprises entre le point A, et les points B, C, D, etc. (*fig.* 1), ou aux longueurs A B, A C, A D, etc., et celui *d'ordonnées* aux distances des points H, I, K, L, etc., à la ligne X Y, ou aux perpendiculaires A H, B I, C K, etc.,

Ceci est applicable également à la courbe *a o h*, et les point qui ont servi à la tracer ont été déterminés par des *abscisses* et des *ordonnées*.

§ 8. — Pour concevoir la formation des *lignes ponctuées*, qu'elles soient droites ou courbes, il faut se représenter le point qui, par son mouvement progressif, trace ces lignes à la surface du papier, comme ne la touchant que par intervalles et parcourant la distance du point *a* au point *b* (*fig.* 2), de telle sorte que la durée du temps pendant lequel il est en contact

avec le papier soit égale à la durée du temps pendant lequel il en est éloigné.

Ce que nous avons dit dans les paragraphes précédents, par rapport aux lignes faites d'un seul trait, sans interruption, peut aussi bien s'appliquer aux lignes ponctuées.

On les trace de même à l'aide du tire-ligne, du compas et ses différentes branches, ou bien avec les plumes d'acier, en observant que les petites lignes qui les composent aient toutes la même direction, la même largeur, la même longueur et la même distance. Pour tracer une ligne ponctuée bien nette, il faut une assez grande habitude, et on éprouvera d'autant plus de difficultés qu'on voudra faire les parties qui la composent plus petites; mais aussi la ligne sera d'autant plus belle.

La faire par une réunion de points, comme on le devrait en se conformant à sa définition, n'est pas une chose à conseiller, parce que le travail que cela exigerait serait trop pénible et demanderait trop de temps pour parvenir à faire tous ces points uniformément grands et uniformément espacés.

§ 9. — L'emploi des lignes ponctuées est d'une application fréquente dans le dessin des objets technologiques. On s'en sert, en général, dans les cas où, à l'aide de lignes auxiliaires et complémentaires, et sans nuire à la simplicité et à la clarté de l'ensemble, on se propose de rendre plus reconnaissable l'objet dessiné, au point de vue de sa construction et de ses autres propriétés.

On les distingue facilement des lignes pleines qui, en qualité de lignes principales, représentent dans une figure les parties *visibles* du corps; de telle sorte qu'avec un peu d'habitude on peut instantanément faire abstraction des lignes ponctuées pour reconnaître la véritable forme de l'objet représenté.

On se sert principalement des lignes ponctuées :

1° Pour indiquer les constructions géométriques à employer dans la recherche de la forme d'un corps ou d'une surface;

2° Lorsqu'il s'agit de représenter dans un dessin, sans nuire à sa clarté, certaines parties dont on voudrait connaître la forme, mais qui sont cachées par d'autres corps. Par exemple, dans le dessin d'un roue, on peut, à l'aide des lignes ponc-

tuées, indiquer la grandeur et la forme de la partie des rayons engagée soit dans le moyeu soit dans la jante, et par contre, représenter les parties visibles par des lignes pleines;

3° Lorsque, dans un dessein, il est nécessaire de faire connaître certaines longueurs par des côtes, on se sert encore de ces lignes ponctuées, que l'on termine ordinairement par des petites flèches, comme dans cet exemple :

<- - - - - - - - - - 2, 8 - - - - - - - ->

Outre ces cas, il se présente encore dans la pratique bien des circonstances dans lesquelles ces lignes sont d'un très grand secours pour le dessin, comme on le verra dans la suite.

§ 10. Il est d'usage, lorsqu'il s'agit de la préparation d'un dessin, de commencer par se tracer une ligne *horizontale*, parallèle à un des côtés du papier ou de la planche, et qui est destinée à donner au dessin une position déterminée. Sur cette ligne, qui d'ordinaire est la ligne *fondamentale* du dessin et quelquefois sa ligne *médiane*, on choisit un point dont la position se détermine, à son tour, par la nature du dessin qu'on a à exécuter. Ce point se trouvera donc tantôt au centre de la feuille, si le dessin a une grande dimension et représente un objet *symétrique*, tantôt plus ou moins sur un des côtés de cette feuille, s'il s'agit d'un dessin qui ne doit occuper qu'une petite portion. La position de ce point doit cependant toujours être choisie de telle sorte qu'il occupe le milieu de la figure que l'on a à tracer ou une des parties principales de celle-ci. Après quoi on élève en ce point, à l'aide d'une construction géométrique, une perpendiculaire qui forme avec la ligne horizontale deux angles égaux, par suite deux angles droits.

§ 11. — Pour élever sur une ligne donnée ab (*fig.* 5), en un point déterminé c une perpendiculaire, on prend, à l'aide d'une ouverture quelconque du compas $cd = ce$; des points d et e; avec une ouverture de compas plus grande, on trace deux arcs de cercles qui se coupent en f, on joint f et c par une droite qui sera la perpendiculaire demandée. Si, au contraire, d'un point hors de la droite ab on veut abaisser une perpendiculaire sur cette droite, dans ce cas, on décrit encore, avec une

ouverture convenable du compas, l'arc de cercle *d e*. Des deux points *d* et *e* comme centres, avec les rayons *d h*—*e h*, on décrit deux arcs de cercle qui se coupent en *h*, et l'on joint les points *f* et *h* par une droite qui est la perpendiculaire demandée.

§ 12. — Les lignes obtenues à l'aide des constructions que nous venons d'indiquer ont l'avantage d'être rigoureusement perpendiculaires, et peuvent servir de *lignes normales* à l'égard des autres lignes qu'on aura à tracer à l'aide de la règle et de l'équerre. On ne peut pas s'en rapporter exclusivement, pour le tracé de ces lignes, à l'exactitude de la règle employée conjointement avec l'équerre; mais par la construction d'une semblable perpendiculaire, on obtient un moyen de vérifier la justesse de ces instruments et de la planche.

Mais si l'on voulait élever au point *c* de la ligne *ab* (*fig.* 3) une perpendiculaire, sans avoir recours à la construction mentionnée dans le paragraphe précédent, on placerait un des côtés qui forment l'angle droit de l'équerre exactement sur une portion de la ligne *a b*, on appliquerait contre l'hypothénuse de cette équerre une règle solidement maintenue en place, le long de laquelle on ferait glisser l'équerre, soit en avant, soit en arrière, jusqu'à ce que son 2[e] côté ait atteint le point *c*; alors, traçant une ligne contre ce 2[e] côté, on aurait ainsi la perpendiculaire demandée. Si le point *c* n'était point placé sur la ligne *a b*, mais extérieurement en un point *f*, et qu'il s'agisse d'abaisser de ce point une perpendiculaire sur *a b*, on suivrait en tous points le procédé que nous venons d'indiquer.

§ 13. — S'agit-il d'élever plusieurs perpendiculaires à *a b* (*fig.* 3), par exemple *i*, *k*, *l*, on maintiendra, le long de cette ligne *a b*, le rebord d'une règle, puis contre celle-ci, le long de la ligne *g h*, un des côtés de l'angle droit de l'équerre, en observant que le petit côté de cet angle soit appliqué contre la règle, et que le grand côté corresponde, au contraire, exactement à la direction de *c q*, après quoi on fait avancer ou reculer l'équerre le long de la règle, jusqu'à ce que le grand côté ait rencontré successivement les points *i*, *k*, *l*, etc., et l'on tracera le long de celui-ci les lignes *i m*, *k n*, et *l o*. Elles seront toutes perpendiculaires à *a b*. On pourrait aussi commencer par placer un des côtés de l'équerre contre la ligne

gh, de telle manière que l'autre côté dépasse un peu la ligne *ab*, puis on fixerait solidement et exactement la règle contre ce second côté. Si alors on fait glisser l'équerre le long de la delà du règle jusqu'aux points *i*, *k*, *l*, ceux-ci seront plus visibles au rebord de la règle et du côté de l'équerre, puisqu'ils restent à découvert, et l'on pourra alors tracer le long de ce côté de l'équerre les lignes *im*, *ke*, et *lo*, qui seront aussi perpendiculaires à *a b*.

On peut également faire usage du procédé que nous avons indiqué dans le paragraphe précédent, où il s'agissait de mener des perpendiculaires par plusieurs points donnés sur la ligne *a b* ou hors de cette ligne. On appliquera donc de nouveau bien exactement un des côtés de l'équerre contre la ligne *ab*, et la règle contre l'hypotenus. On glissera ensuite l'équerre soit en avant, soit en arrière, le long de la règle solidement maintenue ; puis le long de l'autre côté de l'équerre, là où les points sont visibles, on tracera une ligne droite qui passera par les points donnés, et qui devra être perpendiculaire à *ao*. S'il arrivait que les points en question fussent situés à des distances trop grandes relativent à la grandeur de l'équerre, et que celle-ci ne suffise plus pour tracer à son aide ces perpendiculaires, alors on l'applique à différentes reprises, contre la ligne *a b*, et toujours un peu plus à droite ou à gauche, en avant ou en arrière, selon que les circonstances l'exigent, et l'on procède comme il vient d'être dit. Néanmoins il est toujours convenable, lorsqu'il s'agit de tracer plusieurs perpendiculaires, à l'aide de la règle, de l'équerre ou du T, de s'aider de temps à autre d'une ligne tracée à travers le dessin, comme il a été dit précédemment, afin d'être certain que toutes ces lignes forment des angles droits. Une des choses les plus choquantes et des plus nuisibles pour la netteté d'un dessin, c'est lorsque des lignes qui doivent être perpendiculaires les unes aux autres, dévient de cette direction. Quand même cette déviation de l'angle droit serait peu sensible, elle engendrerait pour des lignes longues et dans le cas d'une échelle réduite, de grandes erreurs, qui seraient d'autant plus sensibles que cette déviation serait plus grande, et qui produisent à l'œil de l'observateur un effet très-désagréable.

§ 14. — Si la ligne *a b*, (*fig.* 3), au lieu d'être horizontale déviait un peu de cette direction, il faudrait alors avoir de nouveau recours au procédé indiqué plus haut au § 11 ; lorsqu'il a été question de mener par un point donné une perpendiculaire sur *a b*, peu importe que ce point soit sur *a b*, comme *c*, ou hors de cette ligne, comme *f* et *h*, par exemple.

Il est encore évident que l'on peut procéder ainsi que nous l'avons indiqué dans les paragraphes 12, et 13, et élever, à l'aide de la règle et de l'équerre, des perpendiculaires sur *ab*, attendu que l'inclinaison de la ligne *ab* ne s'oppose pas à l'emploi de ces instruments, et il sera ainsi possible de tracer dans ce cas-ci, comme précédemment sur *a b*, les perpendiculaires *gh*, *im*, *kn*, *lo*, etc. De même, ce qui a été dit dans les paragraphes 11, 12 et 13 est encore applicable lorsque la ligne *ab* a une position verticale.

Dans le cas de cette inclinaison de la ligne *ab*, on ne pourra se servir du T, qu'autant qu'il sera articulé et qu'on lui donne une position telle que le rebord de la partie mobile vienne à être placé exactement dans la direction des lignes *ab* ou *gh*, tandis que l'on maintient son autre partie dans une position fixe et solidement vissée contre le rebord de la planche.

§ 15. — On donne le nom de *parallèles* à deux ou plusieurs lignes doites qui, prolongées indéfiniment dans un même plan, ne pourront jamais se rencontrer.

La ligne *gh* (*fig.* 3) peut aussi servir pour tracer, conjointement avec la règle et l'équerre, des parallèles à *a b*. A cet effet, on pose la règle contre *gh*; on appuie contre cette règle le petit côté de l'équerre, de manière à ce que le grand côté se confonde avec *c b*; on fait ensuite glisser l'équerre le long de la règle jusqu'aux points *r*, *s*, *u*, etc., et l'on trace par ces points les lignes *r t*, *s u*, etc., qui seront parallèles à *a b*, parce que toutes elles forment avec la perpendiculaire *g h* des angles égaux. Veut-on prolonger ces lignes en *v*, *w*, il suffit d'appliquer le bord de la règle le long de *r t*, *s u* et *a*, et de prolonger le tracé de ces lignes dans cette direction.

§ 16. — S'il s'agit de mener par les points *c* et *c'* (*fig.* 4) des lignes parallèles à *ab*, sans que préalablement on ait élevé, comme dans le paragraphe précédent, sur *a b* une perpendi-

culaire; on applique alors l'hypothénuse de l'équerre contre la ligne *ab*, et la règle contre un de ses côtés; puis on glisse cette dernière le long de la règle solidement fixée, soit en avant, soit en arrière, jusqu'à ce que les poiuts donnés *c* ou *c'* viennent à se trouver exactement sur l'hypothénuse, puis on trace le long de celui-ci les lignes droites *d' e'* ou *de*, qui seront parallèles à *ab*.

§ 17. — Veut-on tracer à l'aide du compas et de la règle droite, et sans le secours de l'équerre, par un point donné *c* (*fig.* 5), une ligne parallèle à une autre ligne *ab*, on abaissera sur *ab*, comme il a été indiqué au § 11, une perpendiculaire *ck*. A une distance convenable du point *d*, soit *e*, par exemple; on élèvera *ef* perpendiculaire à *ab*, et l'on fera $eg = cd$; enfin, on joindra le point donné *c* avec le point *g* obtenu à l'aide de cette construction, et on aura la droite *hi* parallèle à *ab*.

Remarque. Outre les méthodes que nous venons d'indiquer pour tracer des perpendiculaires et des parallèles, il en existe encore plusieurs autres qu'il serait bon de faire connaître, mais que l'étendue de cet ouvrage ne comporte pas.

Ce serait aussi ici le lieu d'exposer encore d'autres constructions géométriques que l'on emploie quelquefois dans le dessin, comme, par exemple, lorsqu'il s'agit d'élever à l'extrémité d'une ligne droite que l'on ne peut prolonger une perpendiculaire à cette droite, ou bien de partager un angle donné en deux parties égales, ou bien encore de tracer des tangentes à un cercle, et ainsi de suite. Si nous les avons négligées, c'est que leur application n'est pas aussi fréquente que celle que nous avons fait connaître, et qu'il en sera fait mention là où leur tracé trouvera une application immédiate.

§ 18. — Si une ligne droite doit être divisée *en plusieurs parties égales*, et si le nombre de ces parties est un multiple du nombre 2, on partage d'abord, à l'aide du compas, la ligne entière en deux parties égales, puis chacune de ces moitiés en deux parties nouvelles, et ainsi de suite.

Avec un peu de pratique on atteindra plus facilement et plus promptement ce but, que si l'on partageait immédiatement la ligne entière dans le nombre de parties demandées, parce qu'il est difficile de donner tout d'abord au compas l'ouverture nécessaire, que le tâtonnement prend beaucoup de temps,

et que la netteté des lignes souffrirait beaucoup de ces nombreux traits de compas.

Dans le cas où le nombre des portions de la ligne à partager ne serait pas une multiple de 2, sans cependant être un nombre premier, on devra aussi tenir compte des facteurs de ce nombre, et d'après cela établir avec le compas les divisions. Prenons pour exemple le nombre 20: on commencera par diviser la ligne en deux parties égales, chacune de ces parties en deux nouvelles parties égales, enfin, chacune des quatre parties en cinq parties égales; et en opérant ainsi, on aura plutôt fini que si tout d'abord on avait voulu diviser ladite ligne en 20 parties égales.

§ — 19. Mais si le nombre de portions dans lequel une ligne droite doit être partagée, était un nombre premier, il est évident que l'on ne pourrait pas employer la méthode indiquée dans le paragraphe précédent, et qu'il faudrait chercher, par des tâtonnements, à obtenir la division demandée. On donne, en conséquence, au compas l'écartement que l'on juge convenable à vue d'œil, on l'applique sur la ligne autant de fois qu'il est nécessaire, on rectifie l'ouverture dudit compas jusqu'à ce qu'on ait atteint la véritable, c'est-à-dire jusqu'à ce que la pointe du compas atteigne exactement l'extrémité de la ligne, après l'avoir porté sur celle-ci aussi souvent que le nombre demandé l'exige.

§ 20. — La géométrie aussi nous enseigne une méthode générale à l'aide de laquelle on peut diviser une ligne quelconque en plusieurs parties égales. S'agit-il, par exemple, de diviser la ligne *ab* (*fig.* 6) en sept parties égales, on tracera au point *a* sous un angle aigu la ligne *ac*.; on prendra ensuite un écartement quelconque *a d* avec le compas, on le portera sur la ligne *ac* autant de fois que le nombre des portions l'exige, soit ici sept fois, de sorte que $ad = de = ef = fg = gh = hi = ik$; on joindra ensuite les points *k* et *b*, par la droite *kb*, puis on mènera par les points *ih*, *gf*, *cd* de celle-ci des parallèles à *kb*, et qui couperont *ab*, en *q*, *p*, *o*, *n*, *m*, et *l*, et qui donneront ainsi les points de division que l'on recherchait. Ainsi, $al = lm = mn = no = op = pq = qb$.

§ 21. — S'il s'agit d'établir sur une ligne *xy* (*fig.* 1) plu-

sieurs points, de telle sorte que leurs distances soient égales à celles qui séparent les points correspondants d'une autre ligne XY, on portera alors successivement sur *ab* la distance de chaque point B, C, D, E, au point A, en partant toujours d'un seul et même point *a*. On fera donc *ab* = AB, *ac* = AC, *ae* = AE, etc. Si on procédait différemment (ce qui cependant théoriquement estla même chose) et que l'on fit *ab* = AB, *bc* = BC, *cd* = CD.*de* = DE, etc., on s'exposerait à commettre, en un point quelconque du de la ligne trajet une erreur qui se propagerait alors sur toute son étendue, et qui pourrait devenir la source de beaucoup d'autres encore plus grandes. Ainsi, admettons que *ab* et *bc* soient déterminés exactement, mais qu'il ait été commis une erreur dans la détermination de *cd*, il s'ensuivrait que les points suivants *e*, *f*, *g* n'occuperont pas leur place convenable; qu'ils seront ou trop rapprochés ou trop éloignés de *a* ;en un mot, qu'ils ne seront plus dans les mêmes rapports avec E, F, G, et cela parce que la distance *cd* ellemême aura été prise ou trop grande ou trop petite.

Observons encore que les points, quelque petits, quelque fins qu'ils aient été faits, occupent cependant toujours une certaine étendue, quelque petite qu'elle soit d'ailleurs (§ 1). Mais par l'application répétée de la pointe du compas dans ces points, (pour obtenir par eux les distances de ceux qui les suivent), il arrive que les plus éloignés se trouvent placés un peu plus en avant, ce qui, en se répétant sur une ligne très étendue, sur un grand nombre de points, et surtout si l'on emploie une échelle très réduite, produit un effet très sensible. Ces erreurs seront facilement évitées si l'on procède comme nous l'avons indiqué plus haut.

CHAPITRE II.

Du tracé des figures fermées.

§ 22. — En mathématiques, on enseigne que deux *droites* ne limitent point un espace, et que, par suite, *le triangle* est la plus simple de toutes les figures fermées par des lignes droites, de même que *le cercle* est la plus simple des figures fermées par des lignes courbes.

Les figures géométriques peuvent être fermées par des lignes droites, ou par des lignes courbes, ou enfin par un mélanges des unes et des autres.

On peut même les diviser en figures régulières et irrégulières. Dans le premier cas, toutes les lignes et tous les angles qui forment leur périmètre, sont égaux; dans le second, au contraire, ils sont inégaux.

La géométrie fait connaître avec détails ce qui est relatif à la construction de ces figures, ainsi que leurs propriétés, ce que nous ne pouvons indiquer ici que d'une manière générale.

§ 23. — Mais, avant de nous occuper de ce qui a rapport au tracé de ces figures, nous rappellerons ce qui a été dit dans les paragraphes précédents, relativement au tracé des lignes droites et des lignes courbes, puisque ces figures sont fermées tantôt par des lignes droites, tantôt par des lignes courbes, ou enfin par un mélange des unes et des autres. Nous devons cependant ajouter que, lorsqu'il s'agit de tracer une figure composée de lignes droites, il faut observer que dans les angles ces lignes se joignent exactement en un point, sans le dépasser ni laisser un certain vide entre elles; que les lignes soient, sous le rapport de la longueur, égales à l'original, ainsi que l'ouverture des angles; que leur sommet puisse, autant que

possible, être nettement figuré ; et enfin, que leurs côtés ne se confondent point les uns avec les autres, quelque petit d'ailleurs que soit ces angles.

On commence par dessiner d'abord ces figures bien exactement à l'aide du crayon, puis après, on repasse chacune de ces lignes avec le tire-ligne. Ce n'est que lorsqu'on a atteint une certaine pratique dans le dessin que l'on peut se hasarder de tracer tout d'abord à l'encre certaines lignes et parties de ces figures.

§ 24. — Ce que nous venons de dire doit aussi être observé s'il s'agissait de dessiner une figure à lignes courbes ou composée d'un mélange de lignes droites et courbes. On commencera donc aussi par les tracer à l'aide du crayon, puis seulement avec le tire-ligne ; et l'on devra également observer que les lignes droites ou courbes aient leur véritable forme, grandeur et position ; que les angles résultant de la réunion de deux lignes droites et courbes ou de deux lignes courbes soient exactement conformes à l'original, et que leurs côtés se réunissent exactement dans un même point. Nous devons ajouter qu'il est fort utile pour celui qui apprend le dessin dans un but technologique de savoir tracer à la main avec facilité ces figures : on y parviendra avec des exercices fréquemment répétés.

§ 25. — Si le contour d'une figure curviligne est composé d'un certain nombre d'arcs de cercle qui se confondent d'une manière si insensible et si peu marquée qu'ils ne forment à leur point de jonction ni angle ni coude, *il faudra toujours que les centres des deux arcs soient en ligne droite avec leur point de jonction*. Ainsi soit *c* (*fig.* 7) le centre de l'arc *m l c* × *d* celui de l'arc *f k c* il faudra que les points *c* et *d* soient en ligne droite avec le point *c*, si les deux arcs *mlc* et *fkc* s'unissent au point *c* sans former de coude, de même les centres *d* et *g* devront être en ligne droite avec le point de jonction *f*, si les deux arcs *ckf* et *pof* doivent se raccorder au point *f*. La raison de cela est que, dans cette supposition, les deux arcs ont, dans leur point de réunion, une *tangente* commune. Ainsi la droite *a b* est une *tangente* de l'arc *mlc*; car elle est perpendiculaire à l'extrémité du rayon *ce*, et en même temps elle est *tangente* de l'arc *fkc*; car elle

est aussi perpendiculaire au rayon *cd*. De même *hi* est une *tangente* das arcs de cercle *ckf* et *pof*, comme *nq* est la *tangente* de l'arc *fop*. Si les rayons de deux arcs et leur point de jonction n'étaient point en ligne droite, il s'ensuivrait que ces arcs n'auraient pas de *tangentes* communes en ce point, mais formeraient au contraire là un angle, et les deux arcs formeraient au point en question un angle, quelque obtus d'ailleurs qu'il puisse être.

CHAPITRE III.

De l'application des couleurs, du lavis et de la manière de se servir des couleurs.

—

§ 26. — Ici le mot *application* veut dire ; donner à l'aide de l'encre de Chine ou de toute autre couleur liquide, à une surface limitée, ou à un espace circonscrit par le contour d'une figure composée de lignes droites, courbes ou d'un mélange de celles-ci, une teinte qui la distingue suffisamment de celle du papier. Cette opération s'exécute à l'aide du pinceau. On dit qu'une teinte *est bien appliquée* lorsqu'elle est partout égale et pure, lorsqu'on ne peut distinguer sur la surface teintée des taches ou plus sombres ou plus claires que le fond, lorsque les angles et les lignes qui forment les limites ne laissent pas de vides non colorés, lorsqu'elle ne présente pas des bords trop marqués (qu'on désigne sous le nom de rebord aqueux, ou rebord d'encre), enfin lorsque la teinte appliquée s'étend exactement en tous lieux jusque contre les lignes qui forment le contour de la figure, sans les dépasser ni rester en deçà.

§ 27. — Pour atteindre ce but, lorsqu'on veut appliquer une teinte, on agit comme il suit : on trace d'abord à l'encre de Chine la figure, c'est-à-dire on l'exécute à l'aide de lignes. Puis, après avoir approprié le pinceau et avoir délayé dans un

godet contenant un peu d'eau l'encre de Chine (1), et enfin, après en avoir suffisamment imbibé le pinceau, on commence par un côté de la figure, ordinairement celui de gauche ou celui d'en haut; on longe avec lui aussi près que possible le contour de la figure allant de gauche à droite ou de haut en bas, et en observant que le trait qu'il produit soit aussi large que son épaisseur le permette, sans toutefois trop appuyer. Cette direction du trait une fois prise, il faut la continuer sur toute l'étendue de la figure, et éviter de recommencer tantôt d'un côté tantôt de l'autre : ainsi, si l'on a commencé avec le pinceau à former le trait de gauche à droite, il ne faut pas changer la direction, mais continuer dans le sens du trait primitif. Pour qu'il ne se forme pas de taches, on n'attendra pas que le pinceau ne contienne plus d'encre; mais, au contraire, aussitôt que l'on remarquera qu'il commence à en manquer, on l'imbibera de nouveau, avec la précaution de ne pas trop le charger, surtout lorsqu'on est près d'atteindre la fin de la figure. Il est surtout très essentiel de ne pas trop mouiller le papier, attendu que par là les limites de la figure pourraient être envahies par l'eau et former en ces points des rebords très marqués qui nuiraient à la netteté de la figure, et qu'il en résulterait, en outre, sur le papier des saillies ou des creux dans lesquels l'eau en s'amassant laisserait des taches. On aura soin de suivre exactement avec le pinceau les lignes qui forment le contour de la figure, sans les dépasser ni laisser aucun vide, ce qui serait cependant moins désagréable que le premier cas, puisqu'on pourrait facilement y remédier en repassant avec le pinceau sur ces vides. On doit avoir soin, avant de commencer cette application, de délayer autant d'encre de Chine qu'on le juge nécessaire pour toute l'opération, attendu que l'on serait inévitablement exposé à faire des taches, si au milieu de l'opération on etait

(1) Pour cette petite opération on se servira avec avantage de l'eau distillée, et à son défaut, d'eau de pluie, attendu que ces eaux sont plus douces que l'eau de fontaine et qu'en outre, la première ne tient pas en dissolution certaines matières végétales ou minérales.

obligé de préparer une nouvelle quantité de cette encre, et il serait alors aussi fort difficile d'obtenir la même teinte que celle qu'on avait d'abord. On ne devra jamais se servir d'une encre ancienne, desséchée et délayée de nouveau; mais, au contraire, pour chaque application on en préparera une nouvelle. En outre, chaque fois avant de commencer à laver, on essaiera ladite encre sur un morceau de papier de même espèce que celui sur lequel on doit opérer définitivement et l'on prendra enfin l'habitude, chaque fois que l'on aura retrempé le pinceau, de faire un petit trait d'épreuve sur une feuille de papier; on aura aussi soin de ne rien introduire de gras dans la bouche. On évitera de repasser avec le pinceau sur les parties où la teinte a été faite avec pureté, parce que l'on y ferait certainement des taches, et on ne laissera pas sécher les portions de la teinte appliquée sur lesquelles il sera nécessaire de repasser pour achever l'application. Durant l'opération, on aura l'œil fixé sur la pointe du pinceau; par cette précaution, on évitera certainement de dépasser les lignes ou de rester en deçà; car c'est surtout avec la pointe que l'on achève les contours, les angles et les courbures.

§ 28. — Si la teinte d'une surface doit être assez foncée, on évitera de l'appliquer du premier coup; mais on commencera par la faire très légère, et on la renouvellera à diverses reprises. Plus on réitérera le nombre de ces applications d'une même teinte, plus la surface apparaîtra belle et unie, attendu que, par ces répétitions, on est à même de recouvrir les taches et les veines qui se trouveraient sur le papier.

Lorsqu'on applique sur une surface une teinte une seule fois, sur une autre deux fois, sur une troisième trois fois, etc., la seconde surface sera nécessairement plus foncée que la première, et la troisième plus foncée que la deuxième; cependant il n'est pas indispensable que le nombre de couches soit proportionné au degré de force de la teinte que l'on veut obtenir. On peut s'en abstenir et faire sur une surface le nombre d'applications que l'on voudra pour atteindre ce degré, pourvu qu'on prépare l'encre plus ou moins foncée. Il sera nécessaire d'attendre chaque fois que celle que l'on vient d'appliquer soit sèche pour pouvoir juger de son effet; car rien n'occasionne

plus facilement des taches que lorsqu'on repasse avec le pinceau mouillé sur une partie encore humide par suite d'une application précédente.

§ 29. — Si une surface doit, au contraire, avoir une teinte toute noire, on y appliquera de prime-abord une encre très foncée, parce qu'alors on a rarement à redouter ces taches; seulement on doit apporter ici encore plus de précaution dans le maniement du pinceau, attendu qu'il est plus difficile de ménager le contour des lignes, et que la moindre déviation devient très-visible. Nous ne saurions assez recommander, lorsqu'il s'agit de faire une semblable application sur une surface, de commencer par tracer les lignes de contour avec une encre très-noire, et de les faire un peu plus larges que d'ordinaire, afin de se faciliter par là un travail ultérieur.

Si, pour donner à une surface une teinte toute noire, on appliquait sur celle-ci, couche par couche, une encre d'une nuance assez foncée jusqu'à ce qu'on ait atteint la teinte voulue, on perdrait non-seulement du temps, mais encore la coloration ne serait ni aussi belle, ni aussi unie que si on l'avait appliquée tout d'abord en une seule teinte.

§ 30. — Si l'on ne devait pas donner à toute une surface de prime-abord une teinte uniforme, mais si elle devait être dans certaines parties plus foncée que dans d'autres, et de telle manière que les teintes sombres succédassent insensiblement aux teintes claires, alors on opère à l'aide du *lavis*.

Une surface est bien lavée lorsque les teintes se fondent insensiblement les unes dans les autres; lorsqu'on ne peut remarquer le point où l'une des teintes cesse et où l'autre commence, et enfin lorsque cette surface ne présente aucune tache ni claire ni foncée.

§ 31. — On se sert pour le lavis de deux pinceaux fixés aux extrémités d'une petite tige en bois ou ivoire (dite hampe); l'un est destiné à être imbibé dans l'encre de Chine, et l'autre dans l'eau. Avec le premier, on applique sur les parties de la surface qui doivent paraître les plus sombres, et cela dans une étendue qui soit en rapport avec la largeur de cette surface, une couche d'encre de chine ni trop foncée ni trop claire. On enlève ensuite avec précaution, à l'aide du second imbibé d'eau,

et en suivant toujours le même sens, le contour de la teinte appliquée en premier lieu, en ayant soin de retremper de temps à autre le pinceau dans l'eau et le passer entre les lèvres, surtout lorsqu'on remarque qu'il se sèche ou qu'il s'imbibe d'une portion de la teinte appliquée, et l'on continue ainsi jusqu'à ce que l'encre disparaisse insensiblement, et jusqu'à ce que la teinte diffère à peine, si on le désire, de celle du papier. Les principales règles à observer pour le lavis sont, que l'on n'applique point trop d'encre à la fois, qu'on maintienne le pinceau humecté d'eau dans des rapports convenables avec l'encre; qu'on ne mouille pas trop, parce que l'encre précédemment appliquée s'étendrait irrégulièrement et trop vite dans les parties mouillées, et produirait infailliblement des taches; enfin, qu'on se garde bien de revenir avec le pinceau sur des parties où l'on a déjà passé et qui ont paru bonnes.

§ 32. — Comme l'on pourra rarement se contenter d'une seule application de teintes, on recommencera cette opération une ou plusieurs fois; on appliquera en premier l'encre sur la partie qui doit devenir la plus foncée; puis à l'aide du pinceau imbibé d'eau, on enlèvera petit à petit les rebords pour passer insensiblement d'une teinte foncée à une autre plus claire. On devra faire attention que la surface lavée ne devienne pas trop foncée, et il ne faudra pas attendre, pour appliquer une nouvelle couche, que la précédente soit devenue trop sèche.

§ 33. — Le lavis de surfaces, et en particulier celui de surfaces qui ont un certain développement, s'exécutera avantageusement si on diminue insensiblement, à l'aide de l'eau, la teinte de l'encre pendant son application même. Dans ce but, on applique, comme à l'ordinaire, sur la partie de cette surface qui doit recevoir la teinte la plus foncée, une certaine quantité d'encre préparée, et cela dans une étendue en rapport avec la largeur de la surface; puis l'on agit comme nous l'avons dit plus haut.

Par l'action du mouillage réitéré du pinceau, l'encre deviendra de moins en moins épaisse, la teinte de plus en plus claire, et enfin on obtiendra une transition bien ménagée du clair au foncé. On emploiera dans ce cas avec avantage l'eau distillée, et à son défaut l'eau de puits.

§ 34. — En général, il est plus aisé de montrer comment on applique les teintes que de décrire le mode d'opérer, et ce n'est que par un exercice prolongé que l'on atteint la perfection. Il arrive au dessinateur le plus exercé, malgré tout le soin et toute l'attention qu'il apporte dans ce travail, de faire quelquefois des taches par suite de circonstances diverses. Ce cas échéant, cela ne doit pas être un motif pour abandonner son ouvrage, puisque, ainsi que nous l'avons fait voir dans les paragraphes précédents, il y a toujours possibilité d'enlever ces taches à l'aide du pinceau suffisamment essuyé, et il faudrait qu'un dessin fût bien endommagé pour qu'à l'aide de ce moyen on ne puisse de nouveau l'approprier.

§ 35. — Si sur un dessin qui a reçu une teinte uniforme il se formait en certains points des taches claires, on les ferait disparaître ainsi qu'il suit :

On imbibe son pinceau dans une encre liquide dont la teinte soit en rapport avec celle de la tache que l'on veut détruire ; puis on le promène sur un morceau de papier assez souvent, pour qu'il devienne à peu près sec ; on éloigne alors un peu le regard du point où l'on va opérer, et avec le peu d'encre qui reste encore dans le pinceau, on corrige les taches apparentes, on enlève encore les rebords humides, dans les points qui auraient été trop humectés, à l'aide de l'autre pinceau légèrement trempé dans l'eau et essuyé. Cette dernière opération sera rarement nécessaire, car le peu d'humidité qu'on pourra appliquer avec un pinceau à demi humecté, sera aussitôt absorbé par le papier. On réitère ces rectifications autant de fois que cela sera nécessaire.

§ 36. — Si, au contraire, les taches étaient plus foncées que la teinte générale, on les fera disparaître, si elles étaient nombreuses, en appliquant successivement des teintes plus claires sur toute l'étendue de la surface lavée, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à donner au tout la nuance foncée des taches. Mais comme ceci est fort difficile à exécuter en général, et ne donne pas toujours des résultats satisfaisants, puisqu'on peut facilement donner à cette surface une teinte trop foncée, il sera préférable, de se servir du pinceau ou d'un petit morceau d'éponge humectée pour les enlever légèrement, et même rendre les

points où ils se trouvaient, plus clairs que la teinte générale de la surface. Après que le tout sera sec on pourrait, d'après les indications du paragraphe précédent, complétement faire disparaitre ces taches à l'aide du pinceau à demihumecté, et égaliser la nuance de ces points avec celle de toute la surface.

§37.— Lorsqu'on se sert d'encre de Chine (1) pour appliquer et étendre les teintes sur un dessin, et que dans cette opération il faut tenir compte des effets de la lumière et des ombres, en opérant d'après les règles de la distribution de la lumière,

---

(1) Une bonne encre de Chine doit être d'un bon grain, et présenter dans sa cassure un aspect brillant et doré. Elle doit pouvoir facilement être frottée soit sur le doigt, soit dans un godet, sans faire éprouver la sensation d'un petit corps dur ou du sable. Elle ne doit pas se délayer trop promptement, et cette dissolution doit offrir l'odeur du musc, odeur qui doit également se développer tandis qu'on la frotte; enfin, elle doit donner naissance à une couleur d'un noir très foncé tirant un peu sur le brun. Mais parce qu'une encre de Chine sent le musc, ce n'est pas là un signe suffisant pour dire qu'elle est d'une bonne qualité; cependant cette odeur existe toujours dans celle qui est bonne. Celle d'une qualité moins bonne sent le camphre, et la plus mauvaise a l'odeur de la suie et de la colle-forte. L'encre de Chine d'une bonne qualité doit présenter sur la partie qui a été frottée et lorsque celle-ci est sèche, un aspect luisant et doré, et un grain fin; celle qui est de qualité inférieure présente un aspect bleuâtre aussi bien à l'extrémité frottée et desséchée qu'à celle qui ne l'a pas été, et offre en ce point un aspect mat et un gros grain. Une bonne encre de Chine doit rester en place lorsqu'on s'en sert pour tracer des lignes, c'est-à-dire lorsqu'après que ces lignes sont séchées on passe légèrement le pinceau à humecter sur leur surface, il n'en résulte pas de trainée, ce qui a lieu lorsqu'on s'est servi de mauvaise encre de Chine, et en particulier lorsque celle dont on s'est servi s'est trop facilement délayée dans l'eau lorsqu'on l'a frottée pour la préparation de l'encre. Il faut aussi que l'encre de Chine puisse s'appliquer facilement et s'étendre légèrement sans former de taches, et présenter dans les parties les moins foncées une coloration légèrement brune. Appliquée en couches foncées, celles-ci doivent offrir, lorsqu'elles sont desséchées, un aspect brillant et très noir, et ne pas former de trainée lorsqu'on passe à leur surface avec un pinceau humecté. L'encre de Chine de mauvaise qualité présente une coloration d'un bleu gris d'acier lorsqu'elle est appliquée très étendue, elle occasionne des taches et des teintes d'un vilain effet; enfin elle ne présente ni luisant ni solidité lorsqu'on y passe avec un pinceau humide.

La meilleure encre de Chine nous vient de la Chine.

on lui donnera le nom de lavis *à l'encre de Chine*, et au dessin ainsi exécuté, celui de ***dessin lavé à l'encre de chine***.

C'est aussi ici le lieu de faire mention du travail fait avec la sépia ; la manière d'opérer avec l'une ou l'autre de ces matières est tout à fait la même. De même que l'encre de chine peut donner, en la délayant dans l'eau, des teintes excessivement fines, toutes les nuances depuis le gris le plus clair jusqu'au noir le plus foncé, de même avec la sépia, surtout lorsqu'elle est mélangé au bistre, on peut obtenir à volonté des teintes excessivement claires ou foncées (1).

La manière de laver soit avec l'encre de Chine, soit avec la sépia se distingue beaucoup de la peinture à l'huile, de celle au pastel, comme aussi de l'art d'ombrer avec le crayon rouge ou noir ; elle est un moyen intermédiaire entre la peinture avec les couleurs et le dessin à l'aide de crayons rouges ou noirs.

§ 38. — Les couleurs dont on se sert ordinairement pour la confection des dessins technologiques sont le *jaune*, le *rouge* et le *bleu*. L'on doit rejeter les couleurs pâteuses (gouache), et donner la préférence à celles qui sont d'une composition végétale ou minérale, afin de pouvoir bien faire sentir les lumières et ne pas les recouvrir avec une couleur pâteuse. Dans leur application, les végétales ont l'avantage d'être transparentes, c'est-à-dire qu'elles ne cachent pas, comme le font les couleurs pâteuses, le contour et les lignes d'une figure, dont il est nécessaire de voir le tracé pour la bien comprendre.

Pour obtenir une couleur jaune, on se sert de la *gommegutte* la plus épurée possible, couleur que l'on reconnaît à la finesse, au luisant, au poli et à la nuance rouge-brun de sa surface, et qui en l'humectant avec un peu d'eau, donne immédiatement une belle couleur jaune.

(1) La sépia est une couleur qui s'extrait de la vessie d'un poisson appelé sépia. On prétend que les Chinois font entrer ce liquide dans la composition de leur encre, en y ajoutant une certaine quantité de riz et de gomme carbonisée. Le bistre se prépare avec la suie la plus fine des fourneaux ; on la fait cuire et on y ajoute une certaine quantité de gomme.

Pour le rouge, on se sert du rouge végétal ordinaire, mais mieux du carmin, qui donne une couleur magnifique, mais plus chère que la première.

Pour le bleu, on se sert du bleu végétal ou de l'indigo, qui est d'un très beau bleu et que l'on vend, comme le carmin, en petits morceaux ou sous forme de poudre.

§ 39. — Lorsqu'on veut se servir de ces couleurs, il faut comme pour l'encre de Chine, les délayer à l'aide d'eau pure, mais, au lieu de les frotter dans un godet, on les frotte avec un pinceau imbibé d'eau que l'on exprime ensuite dans le godet.

§ 40. — On se sert rarement dans le dessin des couleurs toutes pures; le plus souvent on les mélange entre elles. Mais il est difficile d'indiquer les proportions exactes de ces mélanges pour obtenir telle ou telle nuance; car la composition de chaque couleur est variable.

Voici les proportions des mélanges de couleurs nécessaires pour pouvoir colorer un dessin :

Couleur de bois.	Prenez :	Jaune 2 parties,
	—	Rouge 1 partie,
	—	et une très petite quantité de noir.
Bois d'acajou.	—	Jaune 1 partie,
	—	Rouge 1 partie,
	—	et très peu de noir.
Couleur de fer.	—	Noir 3 parties,
	—	Bleu une partie,
	—	et très peu de rouge.
Couleur du laiton.	—	Jaune 3 parties,
	—	Rouge 1 partie.
Couleur du cuivre.	—	Rouge 5 parties,
	—	Noir 1 partie,
	—	Jaune 1 partie.
Couleur de bronze.	—	Jaune 5 parties,
	—	Rouge 2 parties.
Couleur de cuir.	—	Rouge 2 parties.
	—	Jaune 1 partie,
	—	Noir 1 partie.
Des cables et cordages.	—	Jaune 1 partie,
	—	Rouge 1 partie,
	—	Noir 1 partie.

Tout le monde sait d'ailleurs qu'un mélange de jaune et de bleu donne naissance à la couleur verte, qu'un mélange de bleu et rouge donne le violet, et qu'un mélange de trois parties de carmin et une partie de jaune donne naissance au ponceau.

Remarque.—On peut également obtenir une couleur de bois en mélangeant à une décoction de café tiré au clair, une petite quantité de rouge ou une bonne encre rouge.

§ 41. — Les couleurs étant préparées par les mélanges indiqués ci-dessus, on procède à leur application de la même manière qu'avec l'encre de Chine ; seulement, ici il y a encore plus de précautions à prendre pour que les couches ne présentent aucune tache et qu'elles aient une teinte uniforme dans toute leur étendue, parce qu'en général, l'application des couleurs est plus difficile que celle de l'encre de Chine, et qu'il y a plus de chances de faire des taches, surtout lorsqu'il s'agit d'un mélange de deux ou plusieurs couleurs. C'est pourquoi il sera nécessaire de remuer vivement ces mélanges de couleurs chaque fois qu'on devra s'en servir, afin que leurs différentes parties qui, par le repos, se séparent en couches en raison de leur pesanteur spécifique; de telle sorte que les plus pesantes occupent le fond du godet, et les plus légères la partie supérieure, se mélangent de nouveau bien intimement; en outre, il sera bon d'avoir un pinceau pour chaque couleur et de bien le nettoyer chaque fois qu'on voudra s'en servir.

De même qu'avec l'encre de Chine, une surface sur laquelle on applique des couleurs deviendra d'autant plus belle que cette application aura été réitérée un plus grand nombre de fois, il va sans dire qu'il ne doit en être ainsi que lorsqu'il s'agit de l'application de couleurs transparentes, attendu qu'avec celles qui sont opaques on ne peut produire qu'une nuance celle de la dernière couche que l'on a donnée.

§ 42. — Si, ayant à faire un dessin noir à l'encre de Chine, on veut le rendre plus intelligible à l'aide de couleurs, pour ce qui concerne les matériaux dont les objets dessinés sont composés, tels que le bois, les pierres, les métaux, etc.; (d'autres circonstances encore peuvent exiger l'emploi des couleurs pour un dessin technologique) : alors on exécute d'abord à

l'encre de Chine le dessin complet de l'objet, d'après les règles indiquées dans la troisième partie de cet ouvrage, sur la distribution de la lumière et des ombres, mais en ayant soin que les parties dans l'ombre soient proportionnellement plus foncées que si l'on n'avait pas employé de couleurs; car, par suite de la mise en couleur de tout le dessin, les ombres paraissent proportionnellement plus ternes et prennent, par rapport aux parties éclairées, un ton beaucoup trop pâle, si on n'a pas eu soin de les faire à l'avance un peu plus foncées.

Ceci fait, on commence par appliquer sur la surface, avec les couleurs convenables mélangées dans les proportions indiquées plus haut, une ou plusieurs couches pâles; on opère ensuite de la même manière sur les surfaces qui précédemment ont reçu les teintes à l'encre de Chine, pourvu que celles-ci soient bien sèches, et on renouvelle cette opération aussi souvent qu'il est nécessaire pour obtenir le degré de beauté, pureté et transparence voulu. Si on négligeait ce soin, et qu'on se bornât à une simple application, le dessin aurait un aspect froid et ne présenterait jamais le degré de clarté et de fraîcheur qu'il aurait si on traitait la surface avec les couleurs, comme on l'aurait fait avec l'encre de Chine. Une seule application de couleurs sur une surface teintée à l'encre de Chine défigurera donc en général un dessin, ainsi que nous l'avons dit, et fera perdre le résultat de toutes les peines qu'on s'était données précédemment pour son tracé et son lavis; car les tons les plus noirs dans les parties ombrées et même les surfaces qui n'ont d'abord reçu qu'une seule couche d'encre de Chine conservent encore une nuance noire trop prononcée par cette seule application de couleur, et ont un aspect trop froid et trop dur, à côté des autres parties.

Il ressort de ce qui vient d'être dit qu'un dessin exécuté à l'aide des couleurs exige, par suite d'un travail plus compliqué, beaucoup plus de temps que n'en réclame un dessin lavé simplement à l'encre de Chine; qu'il coûte plus de soins et présente plus de difficultés; enfin que, dans le cas où l'on a réussi à lui donner une apparence satisfaisante, ce n'est qu'en joignant à une grande adresse dans le maniement des couleurs un goût exquis pour donner à celles-ci un accord et une har-

monie agréables, et qui ne choque pas la vue par une application trop crue ou par une trop grande bigarrure.

§ 43. — Par l'emploi des couleurs, on se propose d'imiter en quelque sorte la nature; cependant on n'y parvient qu'en apportant dans leur application et leur maniement un coup d'œil exercé et beaucoup de goût. Dans le cas contraire, au lieu d'atteindre ce but, on ne fait que s'en éloigner. L'observateur en effet est bien plus exigeant pour un pareil dessin que pour celui qui est simplement lavé à l'encre de Chine, il exige pour l'une une harmonie, une illusion qu'il ne demande pas pour l'autre.

Ainsi donc, on conseillera de ne pas toujours appliquer des couleurs sur un dessin, à moins que l'on ait en vue de bien caractériser la nature des matières qui composent les différentes parties de l'objet dessiné, ce qui, dans ce cas, est essentiellement utile.

CHAPITRE IV.

Du développement du cercle.

§ 44. — *Développer* une circonférence de cercle ou toute autre ligne courbe, c'est trouver une ligne droite égale en longueur à la circonférence, ou à la ligne courbe donnée.

Ainsi, le *développement de la circonférence* est la conversion de celle-ci en une ligne droite de même longuer.

L'on sait combien ce sujet a occupé les méditations de savants mathématiciens tant anciens que modernes, avec quelle peine inouïe et quelle grande dépense de temps, avec quelle admirable sagacité et quelle haute portée d'esprit ils se sont efforcés, mais en vain, de trouver le rapport *rigoureusement mathématique* entre le *diamètre* et la circonférence du *cercle*.

Et, bien que tous ceux qui se sont mis en campagne pour la recherche de cette toison d'or soient rentrés sans avoir mené leur entreprise à bonne fin, et après avoir obtenu tout au plus un résultat quelconque plus ou moins satisfaisant (1), toujours est-il que le fruit des travaux de ces savants, livré par eux au monde, est plus que suffisant pour le dessinateur dans les applications, et le met à même de résoudre toutes les questions d'art qu'il peut se proposer; car, quoiqu'on ne puisse prouver que la route suivie jusqu'à présent ne mène un jour vers le but avec toute la rigueur mathématique, il n'en est pas moins vrai qu'elle nous en fait approcher tellement que l'erreur n'est pas appréciable.

§ 45. — On a suivi deux voies pour arriver à la solution de ce problème : la première consistait à chercher, à l'aide du calcul, un nombre qui exprimât le rapport entre le diamètre et la circonférence; la seconde, à établir une construction géométrique pour obtenir une droite qui fût le développement de la circonférence. Comme l'on est dans la nécessité, pour vérifier le second procédé, d'avoir recours aux rapports trouvés par le premier, il est naturel que nous fassions connaître d'abord celui-ci; puis nous indiquerons une construction géométrique qui peut être employée dans la pratique pour le développement de la circonférence. Les méthodes diverses à l'aide desquelles on est parvenu à exprimer par des nombres le rapport qui existe entre le diamètre et la circonférence d'un cercle sont indiquées dans les ouvrages mathématiques qui s'occupent de cette question. Le dessinateur construit et ne calcule pas (2).

§ 46. — Un Hollandais, Ludolph-van-Ceulen, trouva que

---

(1) Voir à ce sujet Kleegel dans son vocabulaire mathématique, Leipsig 1803, sur ce qui a rapport à la quadrature du cercle, à sa rectification, la cyclométrie.

(2) Cependant nous devons faire remarquer qu'il n'est pas sans utilité, pour le dessin pratique, d'appeler le calcul à son aide, la suite prouvera ce que nous disons ici.

le rapport qui existe entre le diamètre et la circonférence du cercle était comme

1 : 3,14159265358979323846264338327950288,

rapport qui est, comme on le voit, composé de 35 décimales. Ce travail de Ludolph, fait à Leyde en 1616, fut publié plus tard par Snellius, dans un ouvrage traduit du hollandais en latin, et intitulé : *de Circulo et adscriptis*, 4, Leyde, 1619. D'autres mathématiciens ont étendu ce nombre de décimales, Schervin jusqu'à 72 chiffres, Jones jusqu'à 100, Machin jusqu'à 120, Lagny jusqu'à 127, et Véga même jusqu'à 140 (*voyez* les leçons mathématiques de ce dernier, t. 2, p. 3, 5e édit.).

Il est évident que les efforts de ces savants ont produit plus qu'il n'est nécessaire dans la pratique, et que déjà les 7 premiers chiffres du rapport indiqué par Ludolph sont suffisants pour calculer avec une grande exactitude le rapport de la circonférence avec son diamètre, et *vice versa*, attendu que l'erreur qui peut exister n'est pas la dixmillionième partie dudit diamètre, et que, par suite, on peut se contenter d'un nombre décimal assez restreint.

Archimède, le plus ancien des écrivains connus qui se soient occupés de cette question, trouva que le rapport du diamètre à la circonférence était comme 7 : 22 (1). Adrien Métius, un contemporain de Ludolph, indiqua le rapport 113 : 355.

Si l'on compare maintenant ces deux rapports à celui fourni par Ludolph, et accepté comme réel pour tous les problèmes de ce genre, on trouvera 113 : 355 = 1 : 3,1415929... et 7 : 22 = 1 : 1428571... Il ressort de ceci que le rapport donné par Métius s'approche beaucoup plus de celui de Ludolph que celui d'Archimède, puisque chez le premier la variation du

(1) Il y a à remarquer, à ce sujet, que l'on qualifie improprement ce rapport du nom de Rapport d'Archimède, puisque lui-même dit qu'il ne l'a pas indiqué comme le véritable rapport, lequel, suivant lui, se trouve compris entre les deux rapports 7 : 22 et 71 : 223.

nombre ne commence qu'au septième chiffre décimal, et que chez le dernier elle se manifeste dès la troisième décimale. Quoi qu'il en soit, on se sert avantageusement du rapport 7 : 22 ; car lorsque dans la pratique il s'agit de construire une circonférence dont le diamètre est donné et exprimé par des chiffres, la simplicité de ce nombre se prête plus facilement à une solution prompte que les autres, et avec ce dernier on obtient d'ailleurs des résultats qui, dans le plus grand nombre de cas, sont suffisants pour la pratique.

§ 47. — Le diamètre d'une circonférence étant donné, il s'agit, à l'aide du rapport 7 : 22, de trouver, avec le compas et la règle, le contour de cette circonférence; on divisera, d'après les indications du § 20, le diamètre en 7 parties égales et l'on en portera 22 sur la direction d'une droite, ce qui donnera la longueur de la circonférence du cercle auquel appartient le diamètre. Est-il besoin de dire que l'on arrive encore plus promptement au but et qu'on obtient le même résultat si l'on porte d'abord la longueur du diamètre donné trois fois sur la ligne droite, puisqu'on ajoute à cette longueur une septième partie de celle du diamètre?

Voici encore un autre procédé pour obtenir, par une construction géométrique, le développement de la circonférence.

§ 48. — *Proposition.* Développer en une ligne droite la circonférence d'un cercle.

Solution. On élève en c, centre de la circonférence $adba$ (*fig.* 8) sur le diamètre ab un rayon perpendiculaire cd, après quoi l'on porte la longueur du diamètre ab trois fois sur une ligne droite quelconque cg de e en f, de telle manière que $ef = 3\,ab$; on prend $fg = \frac{1}{5}$ de ad, et ainsi la ligne droite eg sera alors la circonférence développée.

Preuve. Si l'on prend chaque fois le diamètre du cercle comme *unité*, c'est-à-dire si $ab = 1$, ef sera alors = à 3. Il ne s'agit donc que de montrer de combien fg se rapproche de la fraction décimale encore fautive du rapport de Ludolph. Puisque $ab = 1$, ac sera égal à $cd = \frac{1}{2} = 0{,}5$. Mais $ad = \sqrt{(\overline{ad}^2 + \overline{dc}^2)}$; donc $ad = \sqrt{(0{,}25 + 0{,}25)} = \sqrt{0{,}50} = 0{,}707$, et puisque $fg = \frac{1}{5}\,ad$, on aura aussi $fg = \frac{0{,}707}{5} = 0{,}141\ldots$, par suite $ef + fg = eg = 3{,}141$.

Cette méthode de construction procure, dans le plus grand nombre des cas, une exactitude suffisante, et nous devons en recommander l'emploi à cause de sa simplicité.

Si l'on comparait maintenant cette manière de faire avec celle indiquée dans le § précédent, il faudrait que $\frac{1}{5}\,ad = \frac{1}{7}\,ab$, ce qui ne se trouve pas par le calcul, car $\frac{1}{5}\,ad = 0{,}141$, tandis que $\frac{1}{7}\,ab = 0{,}142$, différence qui n'est nullement appréciable dans le dessin, puisqu'on ne peut pas indiquer avec le compas une différence de 1 millième entre le diamètre et la circonférence, à moins que l'on ne se soit servi d'une échelle extraordinairement grande.

§ 49. — S'agit-il de développer une 1/2 circonférence, un 1/4 de circonférence, ou n'importe quelle portion de circonférence, il est évident qu'alors on commencera par développer à l'aide d'un des procédés que nous venons de faire connaître, la circonférence entière en une ligne droite, et qu'on prendra ensuite sur celle-ci le nombre de parties nécessaires pour avoir l'arc qu'il s'agit de développer. Dans l'exécution chacun trouvera encore quelque moyen qui lui abrégera le travail, et il ne sera pas toujours nécessaire, par exemple, de rétablir toute la circonférence d'un arc du cercle qu'on veut développer.

DEUXIÈME PARTIE.

DESSIN GÉOMÉTRIQUE.

CHAPITRE Ier.

Définitions et notions générales.

§ 50. — Le dessin, dans la signification la plus générale de ce mot, apprend comment tout corps réel ou imaginaire, quelles que soient du reste ses dimensions, doit être représenté à la surface d'un corps, pour que l'image qui en résulte offre une ressemblance parfaite avec le corps en question, et puisse aussitôt être reconnue et comprise par le sens de la vue, et par lui seul. Il est nécessaire que cette image ne puisse se distinguer de la surface sur laquelle elle est dessinée, ni par des enfoncements, ni par des saillies (à moins que l'on considère comme tels ceux déterminés par les instruments et les couleurs à l'aide desquels l'image a été exécutée).

§ 51. — On donne le nom de *surface du dessin* au côté du corps sur lequel on se propose de figurer un objet ; et quoique ce côté puisse offrir toute espèce de forme (puisque, aidé de la géométrie, le dessin apprend comment tout corps peut être figuré sur une surface plane, courbe, etc.), néanmoins on choisit de préférence des *surfaces planes*, surtout lorsqu'il s'agit de dessins technologiques. C'est aussi pourquoi il ne sera question ici que de la représentation des objets sur des surfaces de ce genre. Le papier sera, par exemple, le corps, et le côté sur lequel on dessine sera la surface du dessin.

§ 52. — D'après cela, il semble que le but le plus essentiel du dessin, c'est de représenter un corps de telle sorte que son

image soit la reproduction fidèle de ce que l'œil aperçoit; que la conformité entre ce corps et son image soit aussi grande que possible; enfin, qu'on ne puisse admettre comme bien, qu'un dessin qui remplisse avec la plus grande perfection possible ces conditions. Cependant le grand usage du dessin et les grands services qu'il rend dans la vie, font que l'on peut être moins exigeant sous ce dernier rapport, et que l'on doit s'attacher de préférence à donner à l'ensemble du dessin une disposition telle que l'on puisse reconnaître d'une manière facile et claire les dimensions exactes et les vrais rapports des diverses parties de l'objet à figurer. Ce double but ne peut être atteint par un dessin unique, comme la suite va nous le prouver.

§ 53. — L'étude entière du dessin peut donc se diviser en deux parties principales.

1° La première, dite *perspective*, par laquelle on se propose, en figurant un objet, d'atteindre sa ressemblance la plus parfaite, la plus réelle, telle enfin qu'en l'examinant, on puisse, comme nous l'avons dit plus haut, le reconnaître comme conforme à la réalité.

2° La seconde, dite *dessin géométrique*, par laquelle on se propose d'une manière toute spéciale, en figurant un objet, de connaître les dimensions et les rapports exacts des différentes parties entre elles et le tout.

§ 54. — Lorsqu'il s'agit d'exécuter un dessin d'après l'une ou l'autre de ces méthodes, il devient indispensable de déterminer avant toute chose le point où est situé l'observateur, c'est-à-dire la distance et la situation du lieu dans lequel l'observateur doit se trouver vis-à-vis l'objet qu'on veut figurer, pour que la forme, la grandeur et la position de cet objet lui apparaissent telles qu'elles seront représentées dans l'image que l'on va en faire. Les lignes droites que par la pensée on peut se représenter être menées de l'objet au point où se trouve l'observateur, se nomment *lignes ou rayons visuels*. Il est évident que l'on ne peut réellement voir un objet qu'autant qu'on peut tirer de celui-ci à l'œil de semblables lignes droites, qu'aucun obstacle ne vient interrompre dans leur trajet. Ces lignes ou rayons visuels ont, quant à leur nature et leurs effets, une grande analogie avec les *rayons lumineux* (§ 258), desquels

il sera question dans la troisième partie de cet ouvrage, au chapitre de la distribution de la lumière et des ombres.

Remarquons seulement ici, en passant, qu'il ne faut pas se représenter, par ces mots *lignes visuelles*, quelque chose de réel qui parte de l'œil pour aller joindre l'objet; mais, au contraire, des rayons lumineux partant de l'objet vu, et dont l'œil reçoit l'impression, attendu que tout corps aperçu, quand même il ne renvoie qu'une lumière réfléchie, devient cependant pour l'œil un corps éclairant (1).

Nous ne parlerons pas de ce qui est relatif aux lignes brisées ou réfléchies, car elles n'ont aucune application dans le dessin géométrique; ces dernières peuvent cependant avoir quelque rapport avec lui, mais dans le cas seulement où il s'agit de distribuer sur un dessin des ombres et de la lumière. Il en sera parlé avec plus de détail lorsque nous ferons connaître les règles à suivre pour la distribution de la lumière et des ombres sur un dessin.

---

(1) Quant à ce qui concerne la vue proprement dite, nous ferons remarquer que de tout point perceptible d'un corps que l'on voit, il part un faisceau de rayons lumineux qui vient frapper l'œil: la base de ce faisceau est déterminée dans cet organe par la largeur de la pupille qui se rétrécit par la trop grande intensité de la lumière qui y arrive, et au contraire, s'élargit lorsqu'elle est très petite. Les rayons de ce faisceau lumineux éprouvent les premières modifications en traversant l'humeur aqueuse de la chambre antérieure et postérieure de l'œil, chambre que l'iris, au centre de laquelle existe la pupille, sépare en deux; la troisième, et la plus forte modification, a lieu dans le cristallin, qui se trouve placé immédiatement derrière cette humeur; enfin la quatrième et dernière s'opère dans leur passage à travers l'humeur vitrée placée en arrière du cristallin; ces rayons se réunissent, en définitive sur un point très petit de la surface interne de la rétine qui tapisse le fonds du globe oculaire, de la même manière que les rayons solaires que l'on réunit sur un point à l'aide d'une lentille. Or, c'est ce point si petit qui est l'image du point plus grand qui projette vers l'œil ses rayons lumineux. Il en est de même pour tous les autres points visibles d'un corps, qui vient ainsi se représenter en entier sur la rétine, à la vérité dans une position renversée toute différente qu'est réellement celle de l'objet. Pour expliquer le mécanisme par lequel cette image est de nouveau rétablie dans sa position réelle, on n'a fait que des hypothèses et probablement on ignorera longtemps encore cet acte secret de la nature.

§ 55. — Si l'on figure sur une surface unie un corps tel que l'œil de l'observateur, placé en un point de vue déterminé, le voit réellement dans la nature, l'on aura alors le dessin *en perspective* de ce corps.

Si on admet, au contraire, pour la figuration de ce corps que le point de vue de l'observateur est placé à une distance *infinie* de lui, on aura alors un *dsssin géométrique* (§ 57) de ce corps.

§ 56. — Dans le premier cas, les rayons visuels sont *divergents*, parce que, réunis en un point déterminé, ils vont de là en se développant, en s'élargissant sous la forme d'une pyramide ou d'un cône, aboutir à un corps, de telle manière qu'ils forment un angle oblique avec la surface du dessin, que l'on doit se représenter dans le dessin en perspective comme étant placé entre le point de vue et l'objet lui-même.

Dans le second cas, au contraire, ces *rayons visuels* à l'aide desquels l'objet est aperçu, et qui arrivent d'une distance infinie, sont admis comme étant des *lignes parallèles entre elles*, qui viennent frapper à angle droit chaque point de la surface sur laquelle l'image doit être représentée ; surface qu'il faut admettre comme étant placée ordinairement derrière ou au-dessous de l'objet dont on veut représenter l'image, selon que l'on donne aux rayons visuels une direction horizontale ou verticale.

C'est pourquoi aussi un dessin géométrique ne fait voir de l'objet représenté que ce qui se trouve dans la direction de ces rayons visuels. Dans le dessin de perspective, au contraire, les rayons visuels se développant sous forme de pyramide ou de cône, l'œil peut non-seulement avoir connaissance de la vue antérieure de l'objet à figurer, mais ordinairement encore de ses vues latérales, et même quelquefois simultanément une partie de ses vues supérieure, inférieure, antérieure et postérieure.

§ 57. — Soit, par exemple, A (*fig.* 9) le corps et *h* le point de vue où se trouve l'observateur : l'on voit que par le prolongement des rayons visuels *ha*, *hb*, *hc*, *hd*, *he* (*fig. g*), etc., l'on apercevra non-seulement la face antérieure *ab*, *ce* et *fg*, mais encore la face inférieure *bc* du chapiteau, et la face su-

périeure *cf* du pied saillant du socle. La vue *m n* du corps qui se trouve au-dessus du chapiteau est cachée par la saillie du chapiteau, qui interrompt ainsi la ligne visuelle partant de *h*, et cache à l'observateur placé en ce point la vue de ce corps, soit en entier, soit en partie.

Si le point où est placé l'observateur pour voir le corps A était situé à une distance *indéfinie*, de telle manière que les rayons visuels *km*, *ka*, *kb*, *ki*, *kd*, etc., fussent parallèles entre eux, et vinssent frapper la face antérieure seule de ce corps, on ne pourra alors voir que la surface marquée par *m n*, *a b*, *cc* et *fg*, et par suite ne représenter dans la figure que celle-ci. Car les faces inférieure et supérieure *b c* et *r f* ne peuvent être aperçues, puisqu'elles se trouvent projetées dans la même direction que celle des rayons visuels, et ne sont pas atteintes par ces derniers. Ainsi donc, dans cette hypothèse, on suppose l'œil de l'observateur indéfiniment éloigné du corps A, ou bien on admet par la pensée cet organe comme étant *à la fois* placé *devant* chacun des points *k*, *k*, *k*.... (*fig. g*) (et dans quelques cas au-dessus du corps), afin que chaque point du corps A puisse être frappé à angle droit par une ligne qui parte de l'œil placé dans ces différents points.

§ 58. — Du moment donc qu'un dessin géométrique représente un corps tel qu'il pourrait se voir à une distance indéfinie, et comme dans la nature cette hypothèse n'est pas possible, il faudra conclure *que jamais par un dessin géométrique les objets ne peuvent être figurés tels qu'ils se présentent réellement à nos regards.*

Malgré cela, ce genre de dessin est le plus fréquemment employé, et toujours dans le cas où il s'agit d'obtenir à l'aide d'un seul coup d'œil, ou par un simple mesurage au compas, les dimensions et les rapports exacts de chaque partie d'un objet. Ajoutons encore qu'il est bien plus facile de représenter un objet à l'aide d'un dessin géométrique qu'à l'aide d'un dessin en perspective. En effet, par ce dernier, qui figure ce qui se voit sur les différentes faces d'un corps conformément à la nature, on obtient à la vérité la reproduction parfaite de ce corps; mais les rapports et les dimensions exactes de chacune des parties, des surfaces ou des lignes qui se trouvent sous

une forme ou une grandeur rapetissée ou différente de la réalité, ne peuvent être obtenus par ce genre de dessin.

Ainsi, pour un dessin en perspective, par exemple, on devra toujours figurer sur le plan du dessin les objets d'autant plus petits qu'ils s'éloignent davantage du point de vue du dessinateur, ce qui est conforme, d'ailleurs, à ce que l'on voit dans la réalité. Dans un dessin géométrique, au contraire, les corps les plus éloignés comme les plus proches sont figurés (à cause du parallélisme des lignes visuelles) dans leur grandeur naturelle, soit à l'aide d'une échelle dont les mesures correspondent aux dimensions mêmes de ces corps, soit à l'aide d'une échelle proportionnelle. L'on peut par le simple mesurage, à l'aide du compas, et sans autre difficulté, trouver les rapports et les dimensions de ces corps.

§ 59. — Comme il est indispensable que les dessins d'après lesquels les ouvriers doivent, par exemple, travailler, soient disposés de telle sorte qu'ils puissent saisir avec la plus grande facilité et de la manière la plus claire tous les rapports et dimensions des objets figurés, et comme, d'ailleurs, cela ne peut être fait qu'à l'aide du dessin géométrique, il en résulte que l'on ne devra présenter aux ouvriers que des *dessins géométriques* des objets qu'ils sont appelés à reproduire.

Veut-on, au contraire, montrer comment se présentera dans la réalité et l'effet général que produira un objet que l'ouvrier est appelé à exécuter, par exemple la construction d'un bâtiment terminé, dans ce cas, il sera indispensable d'exécuter encore, outre le tracé géométrique, un dessin en perspective de tout le bâtiment, et tenir compte du point de vue duquel on le voit en réalité.

Il est quelquefois bon aussi de se servir de ces deux genres de dessins à la fois, lorsqu'il s'agit par exemple de figurer des machines, des objets très-compliqués. Par le premier, on aura une connaissance exacte du rapport des parties avec le tout et leurs dimensions; par le second, on aura une vue de tout l'ensemble, et il sera surtout très essentiel de se la procurer, lorsqu'il s'agira d'un objet inconnu, et composé d'un assemblage de plusieurs parties. Dans ce cas, un dessin en perspective est, comme on le voit, d une grande importance;

il procure, par une seule inspection, une impression que par d'autres voies il eût été très-difficile d'obtenir.

§ 60. — Outre le dessin en perspective duquel il a été question dans le paragraphe 55, il existe encore un genre de dessin, dit *la perspective cavalière*.

La perspective cavalière se différentie de la perspective ordinaire, en ce que la face latérale d'un objet figuré par un dessin géométrique est représentée comme si cette face était parallèle avec le plan du dessin, et en ce que les lignes à l'aide desquelles on détermine la forme et la position des autres faces dudit corps, ne convergent pas comme dans le dessin en perspective ordinaire, et que suffisamment prolongées, elles ne viennent pas se couper en un point, mais qu'elles se développent dans une direction parallèle, conservent leur véritable longueur, et sont tracées en formant avec ces lignes horizontales ou verticales un angle de 45 degrés; de telle manière qu'il en résulte une espèce de dessin en perspective, qui à la vérité ne représente pas l'objet tel que l'exige le § 55, mais qui offre cet avantage que l'on peut représenter les différentes faces d'un corps, et en outre obtenir ses dimensions vraies. (Voyez *fig.* 12 et 13.)

La perspective cavalière est identiquement la même que celle indiquée au § 55, avec cette différence que le point de vue de l'observateur se trouve placé ici dans une direction verticale, ordinairement à un point d'élévation extraordinaire au-dessus de l'objet à figurer, et que de ce point de vue l'objet se trouve représenté, comme le verrait un oiseau ou une personne placée dans un ballon.

§ 61. — Il ressort de tout ce qui vient d'être dit que, à l'aide du dessin géométrique dans lequel les côtés opposés d'un corps apparaissent dans leurs proportions véritables, la forme du corps peut être représentée telle qu'elle existe dans la *réalité*; tandis que par un dessin de perspective elle est représentée telle qu'elle apparaît à la vue; enfin, que pour les dessins technologiques, on est obligé d'avoir bien plus souvent recours au dessin géométrique qu'au dessin en perspective dont l'application dans un semblable cas est extrêmement rare.

Dans le chapitre suivant, on fera voir qu'à l'aide du dessin géométrique on peut arriver à figurer chaque corps vu en même temps de plusieurs côtés, et par suite en donner une connaissance plus intime que lorsqu'on n'en figure qu'un côté.

§ 62. — Lorsqu'on veut figurer un objet sur un plan à l'aide du dessin géométrique, il faut se représenter cet objet comme étant situé en face du plan si celui-ci est vertical, ou au-dessus du plan s'il est horizontal; que de tous les points qui forment son contour, il se dirige vers la surface du plan un nombre suffisant de lignes perpendiculaires qui la couperont en certains points. Si ensuite on relie ces points par des lignes apparentes, l'objet se trouvera ainsi figuré à la surface du plan, de telle manière que l'on pourra avoir dans le dessin qui en résultera la reproduction de toutes les parties qui le constituent, et qui toutes se trouvent dans la direction de ces rayons visuels. Mais l'objet à représenter peut être ou parallèle au plan, ou perpendiculaire, ou incliné vers lui d'une manière ou d'une autre.

Si après avoir dessiné un côté d'un objet, on doit en faire autant pour un autre de ses côtés, il faudra alors admettre que le plan et la direction des rayons visuels qui tombent perpendiculairement sur lui n'ont pas changé; l'objet que l'on veut figurer change seul de position, puisqu'il présente au plan un autre côté. On peut aussi se représenter l'objet à figurer comme immobile, et au contraire, le dessinateur et par suite le plan, ainsi que les rayons visuels perpendiculaires à celui-ci, comme *changeant leur position*. Toutefois, cette figure, quelque exact que soit le travail, présente dans le tracé, et surtout dans la distribution ultérieure des lumières et des ombres à l'aide du lavis sur les différentes vues dudit objet, beaucoup d'inconvénients; de sorte qu'il vaut miex accorder la préférence au premier moyen de représentation indiqué. La vérité de cette assertion ne peut dès maintenant être démontrée, mais elle est fondée. Nous y reviendrons lorsqu'il sera questiou de la distribution de la lumière et des ombres (§ 74, 243, 483, etc.).

Il ressort de ce qui vient d'être dit, que *les lignes de projection sont identiques avec les rayons ou lignes visuelles*, desquels il a été question dans le § 54.

§ 63. — Puisque toute image d'un objet est produite par des lignes ou parallèles entre elles ou concourant en un même point, et qui déterminent ainsi *la projection* de cet objet, il s'ensuivra qu'il y aura trois espèces de projections :

1° Si les lignes de projection sont parallèles entre elles, et viennent frapper à angle droit la surface du plan, la figure qui en résultera se nommera une *projection orthographique*.

2° Si ces lignes sont parallèles entre elles, mais dirigées obliquement vers le plan, et si l'angle qu'elles forment a environ 45°, la figure qui en résultera se nommera une *projection oblique*.

3° Enfin, si ces lignes se réunissent en un seul point, l'image de l'objet qui en résultera sera une *projection perspective*.

D'après cela on peut considérer chaque dessin géométrique comme étant la projection orthographique d'un objet, attendu que dans chacun de ces dessins les lignes visuelles ou de projection viennent frapper perpendiculairement la surface du plan. Pour figurer sur une surface un dessin géométrique, il sera donc nécessaire de connaître les lois et les règles à l'aide desquelles on peut représenter la projection orthographique ou la figure géométrique de chaque ligne, de chaque surface et de chaque corps, quelle que soit, d'ailleurs, leur position par rapport à la surface du plan.

Nous ferons encore remarquer que l'on doit se représenter l'objet que l'on veut figurer comme étant situé au-devant ou au-dessus du plan et comme ayant des dimensions réduites, car, dans le plus grand nombre des cas, il est impossible de figurer cet objet avec ses dimensions réelles; et en second lieu, que la distance de l'objet aux deux plans (c'est-à-dire à l'horizontal et au vertical), ne peut d'aucune manière modifier la forme et l'étendue de l'image, puisqu'elle n'est pas tracée sur le plan à l'aide de lignes divergentes.

§ 64. — C'est en suivant les préceptes de la géométrie descriptive, préceptes qui sont les fondements de l'étude du dessin géométrique, et que Monge le premier a enseignés, que l'on est parvenu à connaître les méthodes à l'aide desquelles on peut figurer, par des constructions, sur un plan, un corps situé dans l'espace. Dans les paragraphes suivants, nous ferons

d'abord connaître les notions préliminaires pour l'étude de la *projection*, et qui doivent être considérées comme indispensables pour comprendre la solution des problèmes ultérieurs de la géométrie descriptive, desquels il sera question plus loin. Si nous nous servons encore dans le cours de cet ouvrage du mot seul de *projection*, on devra toujours entendre par là une projection orthographique.

§ 64. — Soit $m\ n\ o\ p$ (*fig.* 10) le plan de projection horizontale, représenté ici en *perspective cavalière*, et soit f un point placé au-dessus de lui dans l'espace, à une distance quelconque. Que du point f on abaisse sur $m\ n\ o\ p$ une perpendiculaire qui vienne le rencontrer en un point, e par exemple, alors e sera la projection du point f, et l'on voit, par conséquent, que la projection d'un point est de nouveau un point, quelle que soit d'ailleurs la position du premier sur la perpendiculaire $f\ f'$.

§ 65. — Soit, d'autre part, une ligne droite $a b$ (*fig.* 10) située dans l'espace au-dessus du plan $m n o p$, et perpendiculaire à sa surface, il sera alors clair que la projection de cette ligne droite sur le plan sera aussi un point c, point qui proviendra de ce que depuis la ligne ab on aura prolongé une perpendiculaire $b c$ jusque sur le plan $m n o p$, ligne qui ici doit se trouver dans le prolongement de $a b$. *Un point peut donc aussi être la projection d'une ligne droite lorsqu'elle sera perpendiculaire à la surface du plan*, quelle que soit d'ailleurs la longueur de cette ligne.

Mais si on admettait que la ligne droite $a b$ se meuve autour du point b, de telle manière que le point b reste fixe, et que le point a, au contraire, décrive un quart de cercle et arrive successivement en a', a'' et a'''. Si de ces points a', a'' et a''' on abaisse alors sur $m\ n\ o\ p$ des perpendiculaires $a'\ c'$, $a''\ c''$, et $a'''\ c'''$, on aura $c c'$ qui sera sur le plan, la projection de $b a''$, $c c''$ celle de $b a'$, et $c c'''$ celle de $b a'''$, laquelle dernière doit être parallèle et égale à $b a'''$. Quant aux lignes $c c'$, $c c''$, elles sont plus petites que $a b$.

Il découle de ceci que l'image d'une ligne droite projetée sur un plan sera toujours plus petite que la ligne qu'elle représente, si celle-ci a une position inclinée vers ce plan, et

que cette image deviendra troujours plus petite plus l'angle d'inclinaison de cette ligne s'approchera davantage de l'angle droit, jusqu'à ce qu'enfin elle soit égale à 0 ou apparaisse sous la forme d'un point, lorsque l'angle sera devenu = 90°.

Au contraire, l'image géométrique d'une ligne droite projetée sur un plan sera égale à la ligne elle-même si celle-ci est parallèle à ce plan. Dans ce cas aussi, l'image de la ligne aura atteint son maximum d'étendue; en effet, la projection *cc'* de la ligne *ab* deviendra de nouveau plus petite que cette ligne si cette dernière continuait à se mouvoir et arrivait en *a'*, etc.

Nous avons, d'ailleurs, admis pour cette figure que la ligne *ab'''* était parallèle avec *op*, un des côtés du plan *mnop*; c'est aussi pourquoi la projection de cette ligne, c'est-à-dire *cc''*, se trouvera être parallèle avec *po*. Les lignes *cc'* et *cc'* se trouvent dans les mêmes conditions, mais elles doivent chaque fois rester dans la ligne *cc''* elle-même, lorsque le mouvement de la ligne *ab* a lieu comme ici autour du point *b* dans un plan.

§ 66. — En général, dans une projection orthographique, l'image d'une ligne ne pourra jamais être plus grande que cette ligne elle-même, mais plutôt plus petite. En effet, la plus grande longueur que la projection d'une ligne puisse atteindre est égale, comme nous venons de le voir dans le paragraphe précédent, à celle de la ligne à projeter elle-même.

Si on admet, au contraire, que les lignes à l'aide desquelles l'image d'une ligne quelconque est représentée sur un plan ne sont pas perpendiculaires à ce plan, tout en restant parallèles entre elles, dans ce cas l'image *cd* de la ligne *ab* (*fig.* 11) pourra bien devenir plus grande que cette ligne elle-même; mais alors aussi *acd* et *bcd* ne seront plus des angles droits, et en définitive *cd* ne sera plus la représentation géométrique de *ab*, de laquelle seule il doit être question ici et dans les paragraphes suivants.

Il va sans dire que, dans le cas où l'on opère d'après une échelle de proportion, la projection orthographique d'une ligne dont la véritable grandeur est 4, par exemple, ne pourra jamais être 5 ou 6, mais bien 3, 2, et même quelquefois 1 point.

§ 67. — La projection *gh* d'une ligne courbe *abc* (*fig.* 10 *a*) qui se trouve dans le plan *qrst*, lui-même perpendiculaire au

plan *mnop* (projection que l'on a obtenue par les perpendiculaires *dg* et *fh*), est aussi une *ligne droite.* Si l'on admet que cette courbe se meut autour de *a*, de telle manière qu'elle atteigne successivement les positions *ab'c'* et *ab'' c''*, sans quitter toutefois le plan *qrst*, alors les projections *ec'* et *ec''*, qui sont déterminées par les perpendiculaires *ae*, *c' e'* et *c'' e''*, seront, à la vérité, plus grandes que *gh*, mais seront encore toujours des *lignes droites.*

Si la ligne *abc*, au lieu d'être une courbe, était une ligne brisée ou mélangée, c'est-à-dire composée de la réunion de plusieurs lignes droites et courbes, mais se trouvant toutes sur un même plan, les choses se passeraient encore ainsi pour leur projection. Ainsi, l'*image géométrique* d'une ligne courbe, brisée ou mixte, placée dans un plan perpendiculaire au plan de projection, sera donc toujours une ligne droite, située à l'intersection des deux plans. Si ces lignes se trouvent, au contraire, dans un plan parallèle au plan de projection, alors leurs projections seront égales aux lignes elles-mêmes. Nous ferons bientôt connaître le moyen le plus simple pour produire de semblables projections.

§ 68. — Si un plan *abcd* (*fig.* 10 *b*), situé dans l'espace, a une position parallèle avec la surface du plan *mnop*, dans ce cas, *efgh*, qui est l'image ou la projection de ce plan que l'on a obtenu en abaissant des angles du plan *abcd* les lignes *ae*, *bf*, *eg* et *dh*, perpendiculaires à *mnop*, sera, par des raisons très faciles à prouver, exactement aussi grand que *abcd.* Si ce plan *abcd* se meut autour de *a d*, et arrive, par exemple, dans la position de *ab' c' d*, dans ce cas son image ou sa projection *ef'g'h* sur le plan *mno* (image que l'on obtient également en abaissant les perpendiculaires *ae*, *b'f'*, *c'g'* et *dh*), sera plus *petite* que la surface *ab' c' d* elle-même. Si ce plan se trouvait dans une position perpendiculaire à *mnop*, soit *ab'' c'' d*, dans ce cas sa projection sera une *ligne droite h''e.* Si ce plan continuait à se mouvoir, et s'il atteignait, par exemple, la position de *ab''' c''' d*, par rapport à *mnop*, dans ce cas son image *ef''' g''' h*, qui est produite par les perpendiculaires *ae*, *b''' f'''*, *c''' g'''* et *dh*, sera de nouveau plus *grande*, et dans la continuation de ce mouvement de rotation du plan en question, son image

grandira toujours jusqu'à ce que l'image produite sur *mnop* à l'aide des perpendiculaires *ae*, b^1f^1, c^1g^1 et *dh* ait atteint son maximum en ef^1g^1h; c'est-à-dire lorsque le plan ab^1c^1d sera de nouveau dans une position parallèle avec *mnop*.

On voit donc qu'il en est de même pour les plans que pour les lignes droites, et que ce qui a été dit dans les paragraphes 65 et 66 relativement à ces dernières, peut aussi s'appliquer aux premières. En effet, un plan se projettera suivant sa véritable grandeur, s'il est parallèle au plan sur lequel on veut le projeter; il deviendra d'autant plus petit que son angle d'inclinaison se rapprochera davantage de l'angle droit, et il apparaîtra enfin sous forme de ligne droite lorsque cet angle sera un angle droit. De même, l'image géométrique d'un semblable plan ne pourra jamais être plus grande que ce plan lui-même, attendu qu'on ne peut se la représenter comme produite que par des lignes qui forment des angles droits avec la surface du plan.

§ 69. — D'après ce qui précède, la surface courbe *abcd* (fig. 10 *c*) donnera naissance, à l'aide des lignes verticales *ae*, *bf*, *cg*, *dh*, abaissées sur le plan *mnop*, à la projection ou figure géométrique *cfgh*. Cette figure deviendra de nouveau plus petite, si cette surface se meut autour de *ab* et qu'il faille représenter *abc'd'* à l'aide des lignes verticales *ac*, *bf*, *c'g'*, *d'h'*, pour obtenir la figure *c'f*, *g'h'*; et *abc'd'* à l'aide des lignes verticales *ae*, *bf*, *ig'* et *kh'* pour obtenir *ef g'h'*. Dans cette position de la figure, *ef* est la projection de *ab* et en même temps de *d'c'*, et il faut, pour obtenir la projection des surfaces qui se trouvent dans cette position, tracer contre elles les tangentes *ig'* et *kh'* qui seront perpendiculaires sur *mnop*.

L'image d'une surface courbe projetée sur une surface plane sera donc, dans tous les cas possibles, une figure dont la forme dépendra de la position et du périmètre de cette surface courbe; il sera donc impossible, à la vue seule de cette image, de conclure si la surface qu'elle représente est plane, ou courbe, ou encore quelle est sa position.

§ 70. — Il résulte de tout ce qui a été dit dans les paragraphes 65 et suivants jusqu'au 69me, que, dans le dessin, les lignes droites et les plans qui ne sont pas parallèles au plan de

projection, mais qui ont une certaine inclinaison par rapport à ce dernier, ne sont pas figurées dans leur grandeur véritable dans leur projection, mais s'éloignent plus ou moins de cette grandeur réelle ; que les lignes et les surfaces courbes apparaissent dans leur projection (dans les hypothèses admises dans les paragraphes 67 et 69) sous forme de lignes droites ou de surfaces planes. Il y a même des cas dans lesquels la projection d'une surface, que celle-ci soit plane ou courbe, est modifiée non-seulement dans son étendue, mais sa forme même est totalement changée.

Or, comme les surfaces sont les limites d'un corps, et comme ces limites sont déterminées par des lignes, il ne sera donc nécessaire que de savoir comment on peut figurer sur un plan la projection des lignes droites, courbes, brisées ou un mélange des unes et des autres, dans une position, une grandeur et une forme quelconques, et par là obtenir en même temps la projection des surfaces, et conséquemment celle des corps. Si l'on réfléchit enfin que la position, la forme et l'étendue des lignes sont déterminées par des *points*, il en résultera que, pour avoir la solution des propositions suivantes, il suffira de trouver sur un plan horizontal ou vertical la projection de certains points donnés dans l'espace.

§ 71. — Une figure géométrique doit être la représentation d'un objet *tel qu'il est*, et non tel qu'il apparaît. Pour satisfaire à cette condition, une *seule* vue de l'objet qu'on représente ne suffira pas toujours pour bien le faire connaître : il sera, au contraire, nécessaire d'en exécuter plusieurs, en admettant, en outre, que l'on a donné à cet objet lui-même une position convenable et naturelle, afin que les vues qu'on en produira reproduisent fidèlement et ses formes et ses dimensions. Or, ces vues devront se trouver dans des rapports convenables avec la longueur, la largeur et la hauteur des objets; il s'ensuivra donc qu'il faudra choisir de préférence, parmi ces vues, celles qui offrent une direction *horizontale* et *verticale*. On sera donc obligé, pour figurer ces deux vues d'un objet, de choisir un plan horizontal et pour le moins un plan vertical.

§ 71 *a*. — Soient *mnop* et *mpqs* (*fig.* 12) deux plans de projection dans une position verticale, et *opqr* un autre plan de projection dans une position horizontale; ils sont tous placés

perpendiculairement l'un à l'autre, de telle manière que *nor*, *mpq*, *smp*, *smn*, etc., soient des angles droits, et par suite, que ces trois plans forment un demi-cube évidé, dessiné en perspective oblique; si maintenant on admet qu'un cube AG se trouve placé dans cet espace évidé, n'importe à quelle place; dans ce cas, d'après ce qui a été dit plus haut, le carré *a'e'f'b'* sera sur le plan horizontal la projection de ce cube, attendu que *a'e'f'b'* sont les points sur ce plan où viennent aboutir les lignes perpendiculaires abaissées des points A, E, F et B sur le plan horizontal. De même, *abcd* sera la projection du même cube sur le plan vertical *mnop*, parce que les lignes A*a*, B*b*, C*c* et D*d* ont été tirées parallèlement à *sm*, et sont perpendiculaires à *mnop*, par la même raison, *bfgc* sera la projection du cube AG sur le plan *smpq*. Dans le § 64 et suivants jusqu'au 69, on a fait voir comment on établissait sur un plan, et en particulier un plan horizontal, la projection des points, lignes et surfaces; dans la figure 12 on voit comment on établit la projection d'un même corps sur trois plans.

Les trois plans *mnop*, *opqr* et *mpqs* sur lesquels on a opéré la projection d'un corps se nomment *plans coordonnés*, il est est évident qu'on peut se les représenter limités ou non limités.

Le corps figuré par AG (*fig.* 12) étant un cube, il s'ensuivra que, d'après sa position choisie dans l'espace, ses projections sur les trois plans coordonnés seront des *carrés égaux*. Si le corps à projeter présente, au contraire, une autre forme, par exemple celle du prisme triangulaire AE (*fig.* 13), alors sa projection sur *mnop* apparaîtra sous forme du rectangle *abcd*; sur *opqr*, sous forme du rectangle *c'd'f'e'*, dans lequel l'arrête AB est représenté par la ligne *a'b'*; enfin sur *mpqs*, sous forme du triangle *bce*. Si l'on donnait aux corps choisis dans les figures 12 et 13 une position autre par rapport aux plans sur lesquels on doit établir la projection, alors leurs projections changeront selon les formes qu'ils ont dans les figures 12 et 13, et ces formes modifiées pourront être trouvées en observant ce qui a été indiqué pour le tracé de celles desdites figures.

Enfin, ajoutons qu'*un point donné dans l'espace ne doit être considéré comme bien déterminé qu'autant que sa distance aux trois plans coordonnés* est connue. Si dans les figures 12 et 13 on connaissait seulement la distance *a*A du point A au plan

mnop, ce point n'aurait aucune position déterminée dans l'espace; car il est commun à tous les plans passant par A et parallèles à *mnop*. Si, outre cette distance, on connaissait encore celle de *a'*A, cela ne suffirait pas encore pour déterminer dans l'espace la position du point A; car les deux distances peuvent être considérées comme des points que l'on peut supposer sur la ligne *b*B. Mais si les trois distances *a*A, *a'*A et *b*A sont données, alors le point A se trouvera suffisamment déterminé, parce que ces trois distances des plans coordonnés n'appartiennent à aucun autre point dans l'espace. Le raisonnement qui vient d'être fait pour le point A peut s'appliquer à tout autre point d'un de ces corps.

§ 72. — En architecture, on donne le nom de *plan* au dessin qui représente toutes les parties de la construction situées sur un plan ou leur projection horizontale et d'*élévation* au dessin qui figure un côté extérieur et vertical de cette construction. Ces deux plans sont donc perpendiculaires l'un à l'autre, et toutes les lignes droites, ou surfaces planes du bâtiment que l'on a à figurer et qui sont parallèles à l'un des deux, se trouveront représentées sur eux par une projection orthographique, soit dans leur grandeur naturelle, comme figure égale, ou, dans le plus grand nombre des cas, comme figures semblables (par suite de l'emploi de l'échelle, § 209 et suivants). C'est pourquoi, il n'est nécessaire, pour le tracé de ces lignes ou surfaces, que de prendre, à l'aide du compas, leur mesure exacte, réelle ou réduite d'après une échelle, et les porter dans une direction et un rapport convenables soit sur un plan horizontal, soit sur un plan vertical à côté des autres lignes déjà tracées. Mais celle de ces lignes droites ou surfaces planes qui ne sont parallèles à aucun de ces deux plans de projection, ne pourront aussi être figurées sur chacun d'eux que dans une grandeur qui n'est pas la grandeur réelle, et qu'on ne pourra plus obtenir par un simple transport du compas, mais bien par une construction qu'il est encore nécessaire de dessiner. Il en sera de même pour les lignes ou surfaces courbes qui n'apparaîtront sous une forme égale ou semblable que lorsqu'elles seront dans un *plan* parallèle à l'un des deux plans de projection; mais dans ce cas, elles apparaîtront sur l'autre plan sous forme de lignes droites (§ 67).

Ainsi donc, que les lignes ou les surfaces soient droites ou courbes, qu'elles aient dans leur projection sur le plan horizontal ou sur le plan vertical une inclinaison, ou qu'elles soient parallèles à ces plans, il sera toujours nécessaire de les représenter aussi bien sur le plan horizontal que sur le plan vertical à l'aide d'une figure géométrique exacte. Le premier de ces deux plans pourra aussi être désigné par le nom de *projection verticale*, et le second par celui de *projection horizontale* de l'objet à représenter.

§ 73. — Mais ce n'est pas seulement dans les dessins d'architecture qu'il est nécessaire de faire choix d'une position convenable pour le corps qu'on veut représenter sur un plan ; cela est aussi indispensable lorsqu'il s'agit de la représentation d'autres objets technologiques. Ce qu'il importe, c'est de leur donner une position horizontale ou verticale telle, que les parties essentielles desdits objets deviennent apparentes. Il s'ensuit que pour leur représentation, il sera très avantageux d'adopter pour l'une des projections un plan horizontal, et pour l'autre, un plan vertical, c'est-à-dire que ces plans soient à angle droit l'un par rapport à l'autre, et on pourra de nouveau donner au premier plan le nom de *plan*, et au second le nom *d'élévation*. D'après cela, le *plan* représentera un corps tel qu'il s'offre à l'œil dans un point de vue horizontal par rapport à l'observateur (ce qui est cause qu'on peut aussi donner avec raison à cette projection le nom de *vue d'en haut*); *l'élévation* représentera un corps tel qu'il est vu dans une position verticale. Par ces vues, on fait connaître les parties extérieures d'un corps, surtout lorqu'on représente *l'élévation* de plusieurs côtés de ce corps, et on figure ainsi des vues *latérales antérieures* et *postérieures* de ce corps.

§ 74. —Si l'on se représente les trois plans de projection coordonnés *mnop*, *opqr*, et *mpqs* (*fig.* 12 et 13), non dans leur position naturelle l'un par rapport à l'autre, mais de telle manière qu'étant rabattus ils viennent se confondre dans un seul et même plan, ainsi qu'on l'a représenté dans la figure 14, alors $c'd'f'e'$ sera le *plan proprement dit*, ou mieux, la *vue supérieure* du prisme à trois faces A *E* (*fig.* 13). Le rectangle *abcd* (*fig.* 14), et le triangle *bce* seront au con-

traire les deux *élévations* de ce même corps, *élévations* qui se distinguent des figures tracées dans (la *fig.* 13) en ce que le rectangle *c' d' f' e'* et le triangle *bce* se montrent dans la (*fig.* 14) dans leur forme *réelle*, tandis qu'ils apparaissent dans la figure 13 sous une forme appartenant à la projection cavalière Si l'on voulait donner aux plans de projection (*fig.* 12) une position analogue à celle de la figure 14; alors les trois projections du cube *AG*, apparaîtraient sous la forme de trois carrés égaux. Ces vues du prisme, aussi bien que celles tracées dans la figure 14, sont donc faciles à rapporter, suivant les mesures et les formes du corps et d'après les lois les plus simples de la géométrie.

Mais ce qui différentie encore essentiellement les deux figures 13 et 14 l'une de l'autre, c'est que dans la figure 13, dans laquelle les surfaces coordonnées ont l'une par rapport à l'autre leur position naturelle, les lignes visuelles ou de projection A*a*, A*b* et A*a'* ne peuvent être parallèles entre elles; tandis que dans la figure 14, dans laquelle ces trois plans se trouvent dans un même plan, ou apparaissent comme un seul et même plan, toutes les lignes visuelles ou de projection sont perpendiculaires entre elles. Ce mode de représentation s'accorde donc exactement avec celui que nous avons décrit au commencement du § 62, de même que la figure 13 rend d'une manière très sensible la description qui se trouve à la fin de ce même paragraphe. En effet, dans la figure 14, le plan et les lignes visuelles qui le frappent perpendiculairement n'éprouvent pas de changement, tandis que le corps à projeter prend tantôt une position, tantôt une autre, par rapport à ce plan, c'est-à-dire lui offre tantôt une face tantôt une autre. Dans la figure 13 c'est tout l'opposé; le prisme à trois faces reste dans sa position, tandis que le plan, de même que les lignes visuelles, sont obligés de prendre différentes positions par rapport au corps pour pouvoir figurer ses différentes faces.

Dans le dessin pratique, où il n'est pas rare que l'on représente sur la même feuille de papier les différentes vues d'un objet, la figuration donnée ici (*fig.* 14) procure beaucoup de facilités, comme on le verra par la suite, et particulièrement lorsqu'il s'agira de distribuer la lumière et les ombres à l'aide de

l'encre de la Chine (§ 483 et suivants). Déjà, même pour l'exécution des *traits de force* (§ 238), il est nécessaire, dans le cas indiqué, de recourir au mode de figuration exposé au commencement du § 62, et visible dans la figure 14, pour la projection d'un corps dans ses différents points de vue, afin que les traits de force que l'on établit s'accordent dans chaque vue (§ 243).

§ 75. — Si l'examen des vues extérieures d'un objet ne suffisait pas pour faire connaître d'une manière suffisante cet objet, et si l'on voulait, en outre, connaître sa distribution intérieure ou sa construction en entier et les représenter à l'aide du dessin, on est alors obligé de figurer, outre le *plan proprement dit* et l'*élévation*, une ou plusieurs *coupes*, c'est-à-dire représenter l'objet tel qu'on le verrait si on l'avait coupé en deux parties égales à l'aide d'un plan, et que, par la pensée, on eût enlevé l'une des deux. On arrive par là à pouvoir représenter par le dessin tous les objets et les parties qui se trouvent à la surface de ces *coupes* et qui doivent être figurées de la même manière à l'aide des lignes de projection parallèles entre elles, et perpendiculaires à la surface du plan. C'est surtout dans les dessins technologiques que l'on fait le plus grand usage de ces coupes, déterminées la plupart du temps par des plans verticaux. Il y a cependant des cas où l'on dessine certains objets tels qu'ils apparaîtraient dans une coupe faite à l'aide d'un plan horizontal. Dans ce cas, comme dans la coupe verticale, il est toujours nécessaire, tant pour la clarté que pour l'intelligence du dessin, d'indiquer, dans l'un ou l'autre plan de projection, la direction de la coupe à l'aide d'une ligne menée à travers le dessin et désignée par des lettres. Alors, si l'on accompagne le dessin même de la coupe de quelques mots, par exemple de ceux-ci : *coupe du plan suivant la ligne AB*, on est aussitôt mis à même de connaître le véritable point de vue sous lequel on doit envisager et juger le dessin.

Comme dans la majorité des cas on n'aperçoit les objets qu'extérieurement, et rarement ou même jamais suivant leur coupe, puisqu'une semblable coupe est la plupart du temps impraticable ou détruirait l'objet, il s'ensuit que le dessin

des coupes exige une certaine imagination. Il faut pouvoir se représenter en pensée les corps avec toutes leurs parties extérieures et intérieures, tels qu'ils apparaîtraient par une projection orthographique sur le plan dans la coupe supposée. Il est inutile de mentionner que lorsque les corps sont très compliqués les difficultés pour le dessin des coupes augmentent.

§ 76. — Si l'on se représente que cette coupe a été faite dans une direction verticale et dans le sens de la longueur de l'objet, dans ce cas le dessin qui la représente reçoit le nom de *coupe longitudinale* ou verticale; si, au contraire, la coupe a été faite parallèlement à son petit sens, on l'appelle *coupe transversale* ou horizontale.

§ 77. — On emploie aussi souvent le mot *profil* pour désigner une coupe longitudinale ou transversale. Ainsi on, appellera celui-là profil longitudinal, celui-ci profil transversal. Cependant cette dénomination ne rend pas assez l'idée que l'on doit attacher à ce mot. En effet, par le mot de dessin en profil on entend plutôt la représentation des lignes de contour des vues latérales d'un objet, que les parties intérieures de la coupe.

§ 78. — Si l'on développe sur une même feuille les deux plans de projection d'un corps, alors on place ordinairement le premier en *haut* de la feuille, et le second *au-dessous* du premier et l'on donne à la ligne qui sépare ces deux plans le nom de *ligne de terre*. Cette ligne, représentée dans la fig. 14 par *op*, ne *doit jamais manquer;* dans le cas que nous indiquons, elle est tout à la fois la ligne de séparation des deux surfaces du dessin, et la ligne suivant laquelle les deux plans de projection se coupent à angle droit.

Il sera bon, pour l'exécution des constructions dont nous aurons à nous occuper plus tard, d'admettre par la pensée un mouvement tout-à-fait opposé à celui qui est décrit au § 74, et ainsi se figurer que ces deux plans ne sont pas confondus en *un seul*, mais que la partie *plan opqr* (fig. 14), ou le plan horizontal placé au-dessous de la ligne de terre, se meut autour de cette ligne (que l'on peut se figurer comme une charnière), jusqu'à ce qu'il vienne, comme dans les fig. 12 et 13, se placer *perpendiculairement* au plan vertical *mnop* situé au-dessus de la même ligne. Il résulte encore de ceci que

l'on a à figurer ordinairement sur le plan horizontal les dimensions de *longueur* et de *largeur*, tandis que les dimensions de *hauteur* doivent être figurées sur les plans d'élévation.

CHAPITRE II.

De la projection des lignes droites, des surfaces planes et des corps limités par des surfaces planes.

—

§ 79. — Lorsqu'il s'agit de projeter des lignes, des surfaces et des corps, il faut avoir égard à la position qu'ils peuvent avoir par rapport au plan de projection : ils peuvent, en effet, lui être *parallèles*, *perpendiculaires*, ou former avec lui *un angle oblique* ; c'est pourquoi aussi, dans les propositions relatives à l'étude de la projection, on aura surtout à déterminer les formes que ces lignes, ces surfaces ou ces corps à projeter devront recevoir dans la figure géométrique.

Rappelons, avant de passer outre, ce que nous avons déjà dit relativement à la représentation des figures situées dans un plan, et qui n'offrent, par conséquent, que deux dimensions, c'est qu'il est évident qu'elles apparaîtront sur le plan de projection auquel elles sont parallèles, dans leur forme et leur grandeur naturelle, et sur celui auquel elles sont perpendiculaires, sous forme de lignes droites, ainsi qu'on a pu le voir dans la *fig.* 10. *b*. Ceci s'applique naturellement à la projection des surfaces qui forment les limites d'un corps. Nous ne nous étendrons donc pas davantage sur ce sujet, car on trouvera, dans ce qui a été dit précédemment, des règles suffisantes pour leur exécution facile. Dans ce qui va suivre, nous nous occuperons d'une manière plus spéciale à faire voir comment on peut parvenir à trouver les projections des lignes, surfaces et corps qui ont une position inclinée par rapport à un ou deux plans de projection.

§ 80. — Soit *m n o p* (*fig.* 15) le plan de projection verticale, ou mieux le *plan d'élévation*, et *o p q r* le plan de projection horizontale *ou le plan proprement dit*, *o p* la ligne de terre, *n o r* un angle droit, et *a g* une ligne droite donnée dans l'espace ; d'après la *fig.* 10, *e g* sera la projection de cette ligne sur le plan vertical, et *d g* celle sur le plan horizontal, en présupposant que les lignes de projection *a e* et *a d* sont perpendiculaires aux plans de projection. Mais *a g* est en même temps la diagonale du rectangle *a f g d*, et comme ce rectangle forme avec *m n o p* un angle aigu *i f a*, alors les côtés *a f* et *d g* (dont les lignes *e f* et *h g* sont les projections sur *m n o p*) ont une seule inclinaison vers *m n o p* ; au contraire, la diagonale *a g* du rectangle *a f g d*, a comme telle une inclinaison double vers le plan vertical *m n o p*. Si l'on considère d'autre part la ligne *a g* comme étant la diagonale du rectangle *a e g e*, elle aura de nouveau comme telle une double inclinaison vers *o p q r*, tandis que *a e* et *e g* n'ont qu'une seule inclinaison vers ce plan. *a g* sera dans ce cas une ligne *doublement inclinée* vers ces deux plans de projection. Mais la diagonale *a h* du rectangle *a e h d*, dont *e h* et *h d* sont les lignes de projection, n'a qu'*une inclinaison* vers les plans de projection, parce que *a e d h* est placé perpendiculairement à ces deux plans.

Si par la pensée on joint à ces plans coordonnés un troisième plan *m p q s*, alors, d'après ce qui a été dit, la ligne *k p* sera sur celui-ci la projection de *a g*, et cette ligne *a g*, en tant qu'on la considère comme étant la diagonale des rectangles *a f g d* ou *a e g e* (desquelle *i k l p* est la projection), aura aussi une inclinaison double vers *m p q s*.

§ 81. — S'agit-il de ne représenter un objet que sous deux points de vue ; par exemple, sur le plan horizontal et sur le plan vertical ou d'élévation, dans ce cas, *o p q r* et *m n o p* seront les deux plans coordonnés, et *o p* formera la ligne de terre qui sépare ces deux plans. La ligne verticale *m p* drevra, au contraire, être considérée comme la ligne de terre, s'il s'agit de figurer les vues antérieures et latérales de cet objet, et *p q* la ligne de terre, s'il s'agit de figurer les vues d'en haut et latérales. Dans les cas même où il n'est question que de deux vues, on

devra cependant admettre par la pensée le troisième plan, même quand il n'est pas nécessaire de s'en servir pour tracer une projection, attendu qu'il n'est pas rare qu'il devienne très utile pour la détermination exacte de certains points, ainsi que nous allons le voir.

§ 82. — Soit $x\ y$ (*fig.* 16), une ligne de terre qui sépare, d'après ce qui a été dit au § 78, les deux plans de projection, de telle manière qu'il faut se représenter ces deux plans comme étant perpendiculaires l'un à l'autre, et par suite ne pouvant pas être placés dans la réalité sur un même plan; soit, d'autre part, A B, la projection d'une ligne droite donnée dans l'espace *parallèle* au plan de projection verticale, mais qui forme l'angle α avec le plan de projection horizontale : on trouvera alors la projection A' B' dans ce dernier, si l'on abaisse des points A et B sur la ligne $x\ y$ les perpendiculaires A E et B F, et qu'on les prolonge jusqu'à ce qu'elles coupent en A' et B' la ligne V W. Cette ligne est parallèle à $x\ y$, puisque la ligne donnée dans l'espace doit être parallèle avec le plan vertical, et A' E donne la distance arbitraire ou déterminée de la ligne donnée A B au plan vertical, ou, ce qui revient au même, la distance de la ligne A' B' à la ligne de terre $x\ y$.

Si l'on donne maintenant à cette ligne A' B' la position de $a'\ b'$ dans le plan horizontal, mais de telle manière que $a'\ b'$ = A' B', et que $a'\ b'$ forme un angle β avec $x\ y$; si l'on élève, d'autre part, dans les points a' et b' des perpendiculaires sur $x\,y$, et si on les prolonge supérieurement jusqu'à ce qu'elles soient coupées en a et b par les lignes horizontales menées de A et B, dans ce cas, $a\,b$ est la projection d'une ligne qui a une *position inclinée double* aussi bien à l'égard du plan vertical que du plan horizontal, puisque par exemple elle est inclinée vers le premier plan non-seulement de haut en bas, mais encore d'avant en arrière et de gauche à droite, comme cela a été le cas pour la ligne $a\ g$ de la figure précédente.

L'exactitude du procédé employé pour la recherche de $a\ b$ est très facile à comprendre, lorsqu'on songe que la position changée de la ligne A' B' dans le plan horizontal (attendu qu'on la transporte en $a'\ b'$) peut bien avoir une influence

sur la dimension horizontale, mais pas sur les dimensions verticales. En effet, si primitivement A' B' = BK, et si l'on se représente le triangle rectangle ABK tourné autour de AK; alors, dans ce changement de position du triangle, par rapport au plan vertical, le côté *b k* devra être, dans la projection de ce plan, plus petit que *a' b'*, et d'autant plus petit que l'angle β se rapproche davantage de l'angle droit. Mais le côté *a k* restera égal au côté A K, et les points *a* et *b* resteront aussi dans le même éloignement de *x y* ou du plan de projection horizontale que les points A et B; c'est-à-dire il faut que *b f* = B F et que *a e* = A E. Si l'angle β = 90 degrés, alors la projection du triangle apparaît comme une ligne droite *a k* = A K.

Si l'on compare encore cette figure avec les précédentes, on verra que l'angle α est conforme à l'angle *a g d* (*fig.* 15), l'angle β avec l'angle *h g d*, et l'angle *y* avec l'angle *e g h*.

§ 83. — *Problème.* — Étant donné, les projections *a b* et *a' b'* (*fig.* 16) d'une ligne doublement inclinée dans l'espace, trouver la longueur réelle de cette ligne et l'angle qu'elle forme avec le plan de projection horizontale.

Solution. — Tirez sous *x y*, à une distance quelconque, une ligne V W parallèle à *x y*, et faites sur elle A' B' = *a' b'*.

Par les points A' et B', menez des perpendiculaires à *x y*, et prolongez-les jusqu'à la rencontre de deux horizontales menées par les points *a* et *b* jusqu'à A et B : vous aurez alors A B qui sera la véritable longueur de la ligne, et α l'angle qu'elle formera avec le plan de projection horizontale.

§ 84. — Si l'on se représente le plan placé au-dessous de *x y* comme étant réellement perpendiculaire au plan situé au-dessus de cette ligne, et si par la pensée on élève sur les deux lignes *a' b'* et *a b* des plans perpendiculaires à ces deux plans de projection, dans ce cas, ces plans se couperont dans l'espace suivant une ligne, qui est égale à A B, et qui marquera dans l'espace les lignes dont *a b* et *a' b'* sont les projections; de même les deux plans *a e g c* et *a f g d* (*fig.* 15), qui sont élevés perpendiculairement à *c g* et *d g* sur *m n o p* et *o p q r*, se couperont là même en *a g*, et donneront naissance par là à la ligne dont *e g* et *d g* sont les projections.

§ 85. — Soient deux perpendiculaires élevées dans un point quelconque C de la ligne A B (*fi.* 16), dont l'une C D est parallèle au plan de projection verticale, mais dont l'autre est perpendiculaire à ce plan, et apparaisse par suite sous la forme d'un point C dans le plan de projection verticale ; alors C' D' sera la projection de C D sur le plan de projection horizontale, et C' G celle de l'autre perpendiculaire, dont la longueur devra être égale à C' G. Si l'on fait $c'\ d' =$ C' D' et $c'\ g' =$ C' G, et si l'on emploie le procédé duquel on s'est servi pour trouver la ligne $a\,b$, c'est-à-dire en élevant sur la ligne $x\,y$ des perpendiculaires aux points c', d' et g', qu'on les coupe en c, d, g' par des horizontales partant de C et D, alors $c\,d$ et $c\,g$ seront sur A B la projection des perpendiculaires C D et C G en question, quoique ici elles ne forment point avec la ligne $a\,b$ d'angle droit. Il y a encore à remarquer ici que $c\,g$ est la projection d'une ligne à inclinaison simple, tandis que $c\,d$ est celle d'une ligne doublement inclinée par rapport au plan de projection verticale, parce que la ligne figurée par C, dans le mouvement qui a lieu ici, reste parallèle au plan de projection horizontale, et que C D, au contraire, dans ce même mouvement, est inclinée ver les deux plans (1).

§ 86. — *Problème.* — Tracer sur un plan de projection verticale la projection d'un carré $m\ n\ o\ p$ (*fig.* 17) qui se trouve dans un plan perpendiculaire au plan de projection horizontale.

Solution. — D'après les indications données au § 67, la projection du carré sur le plan horizontal apparaîtra sous forme de ligne droite. On tracera donc au-dessous de $x\,y$, à une distance quelconque de cette ligne, le cadran B D B' de

(1) Nous fixerons l'attention du lecteur d'une manière toute particulière sur les paragraphes 80 à 85, attendu qu'ils sont le fondement du plus grand nombre des problèmes suivants. Si on les a exactement saisis et compris, on se facilitera et abrégera la solution des problèmes de ce chapitre. De même un examen attentif de la figure 15 fournira encore d'autres considérations très intéressantes relatives aux projection des lignes, des surfaces et des angles.

telle manière que BD soit parallèle à $x y$, que B' D soit, au contraire, perpendiculaire à $x y$, et que B' D forme avec $x y$ un angle quelconque, et l'on considérera ces lignes comme étant les diverses projections du carré *m n o p* sur le plan de projection horizontale. A cet effet, on fera BD = *n p*; on partagera BD au point A en deux parties égales, et l'on décrira le quart de cercle A A' A'. Si on mène ensuite des points B, A, D, B' et A' des perpendiculaires à $x y$, et si on coupe ces lignes au-dessus de $x y$ dans les points correspondants par des lignes horizontales, alors *a b c d* sera la projection du carré qui est parallèle au plan vertical, *a' b' c' d'* la projection du carré incliné vers ce même plan, et *a' d c'* la projection du carré perpendiculaire à ce même plan. Il est évident que *m n o p* peut être une ligne brisée ou bien être une surface limitée par ces lignes.

L'exactitude de cette manière de procéder est rendue évidente par ce qui a été dit précédemment, attendu que dans le changement de position du carré sur le plan horizontal, les distances horizontales peuvent seules être changées sur le plan vertical, tandis que les distances verticales à $x y$ doivent toujours rester les mêmes.

§ 87. — Comme *a b c d* est égal à *m n o p* (*fig.* 17), lorsque sa projection BD est parallèle à $x y$, il s'ensuit que les angles correspondants *b a d* et *n m p*, *a b c*, et *m n o*, etc., seront égaux entre eux; ce qui veut dire, en d'autres termes, *que si la figure à projeter est parallèle au plan de projection, les angles de la figure projetée seront entièrement semblables à ceux qui sont dans l'espace*, peu importe que ces angles soient aigus, obtus ou droits.

Au cas contraire, si la figure à projeter se trouve inclinée au plan de projection, alors, en même temps que la figure change d'aspect, la grandeur de l'angle change aussi, et ainsi l'angle *b' a' d* (*fig.* 17) sera *plus petit* que l'angle *b a d*, parce que *a' c'* est resté égal à *a c*, tandis que *b' d* est devenu plus petit que *b d*. Cet angle deviendra naturellement toujours plus petit, plus le point B' se rapprochera du point B', et il disparaîtra complétement et sera égal à zéro lorsque BD sera arrivé en B' D. Par contre, l'angle *a b c* deviendra d'autant *plus*

grand que le point B se rapprochera davantage du point B', et ainsi, par exemple, l'angle *a' b' c'* sera plus grand que l'angle *a b c*, malgré que *a' c'* soit resté égal à *a c*, *b' c'* au contraire est devenu plus petit que *b c*. Enfin, si B D atteint la position de B' D, l'angle *a b c* sera alors égal à 180 degrés.

Ce qui vient d'être dit des angles *b a d* et *a b c* peut aussi s'appliquer aux angles *b c d* et *a b c*. Si *m n o p*, et par suite *a b c d*, n'étaient point des carrés, et si en même temps *b a d*, *a b c*, etc., n'étaient pas des angles droits, ce que nous venons de dire, n'en resterait pas moins vrai, et dans le mouvement de B D admis ici, l'angle *b a d* deviendra aussi toujours plus petit et *a b c* toujours plus grand, jusqu'à ce que le premier soit égal à 0, et le second égal à 180 degrés, si B' D forme un angle droit avec *x y*; on pourra aussi employer pour la solution le procédé indiqué au § 86.

Mais il y a à remarquer que l'angle droit ne change pas toujours de grandeur dans sa projection, si le plan sur lequel il se trouve a une position inclinée par rapport au plan de projection, et qu'il ne change pas, si le mouvement du plan se fait de telle sorte qu'un des côtés conserve une position fixe et parallèle au plan de projection, et que l'autre côté, au contraire, forme avec ce plan un angle quelconque.

Pour se convaincre de la vérité, de cette assertion, admettez que la surface *a b c d* (*fig.* 10, *b*) soit un rectangle, que *a b c*, *b c d*, *c d a* et *d a b* soient des angles droits, alors non-seulement *e f g*, *f g h*, *g h e* et *h e f*, mais encore *e f' g'*, *f' g' h*, *g' h e* et *h e f'* seront *des angles droits*, quoique *a b' c' d* ait reçu une position inclinée vers le plan de projection *m n o p*.

§ 88. — *m n o p* (*fig.* 17) est un carré, et *a b c d* en est un autre qui lui est semblable et semblablement placé; par conséquent, les lignes correspondantes sont parallèles entre elles. Il sera encore facile de démontrer, par la similitude des triangles de la figure, que dans la projection *a' b' c' d'* les côtés correspondants seront parallèles deux à deux, et il suit de là que les *projections de lignes parallèles entre elles* sur un et même plan *sont de nouveau des lignes parallèles*, peu importe du reste

que les lignes données soient parallèles au plan de projection, ou qu'elles ne le soient pas.

§ 89. — Si on choisit sur le plan *m n o p* (*fig.* 17) un point quelconque *g*, et s'il s'agit de déterminer la projection de ce point sur le plan *a' b' c' d*, on mènera alors *g h* perpendiculairement à *x y*, on fera A' H = *o h*, *o n* élèvera au point H sur *x y* une perpendiculaire, et on fera au-dessus de *x y*, *g'* H' = *g h*, et *g'* sera le point cherché. A l'aide du même procédé, on parviendrait à trouver la projection de tout autre procédé, par suite celle d'un système de points ou celle d'un polygone, si celui-ci a une position inclinée vers le plan. Dans le cas présent, l'angle *b' g' a'* est la projection de l'angle *n g m*.

Enfin, il y a encore à remarquer qu'en général la construction reste la même, si le polygone se trouve dans un plan perpendiculaire au plan de projection verticale, et incliné au contraire sur le plan de projection horizontale, ainsi que cela sera rendu sensible dans le problème suivant.

§ 90. — *Problème.* — Un hexagone régulier *a b c d e f* (*fig.* 18) se trouve avoir d'abord dans l'espace une position telle qu'il est *perpendiculaire* au plan de projection verticale, et se projette sur ce plan suivant la ligne *g k*, tandis que sur le plan de projection horizontale, le plan de polygone est incliné suivant l'angle α; il s'agit de faire voir quelle serait la projection de cet hexagone sur ce second plan, puis sur le premier, lorsqu'il change sa position primitive dans l'espace, et reçoit, par rapport à ses plans de projection, une inclinaison double.

Solution. — A une distance quelconque de la ligne *x y* on mène une parallèle *d' a'*; des points *g*, *h*, *i* et *k*, on abaisse sur *x y* des perpendiculaires, on détermine par là les points *a'*, *b'*, *c'*, *d'*, *e'* et *f'*, en faisant *c' e'* = *c e* et *b' f'* = *b f*, et en les joignant par des lignes droites; de cette manière, *a' b' c' d' e' f'* sera sur le plan de projection horizontale la projection de l'hexagone.

Puis on trace l'hexagone *a' b' c' d' e' f'* dans une position telle, par rapport à *x y*, que la ligne *d'' a''* (que l'on fait égale à *d' a'*), forme avec *x y* un angle β, et que *a'' b'' c'' d'' e'' f''* soit en tout semblable à *a' b' c' d' e' f'*. Aux points *a'' b'' c'' d'' e'' f''*

on élève des perpendiculaires vers $x\,y$, et on les coupe au delà de cette ligne en A, B, C, D, E et F par d'autres lignes que l'on mène de g, h, i et k parallèlement à $x\,y$; alors A B C D E F sera la projection cherchée sur le plan de projection verticale de l'hexagone régulier à double inclinaison.

§ 91. — Si $p\,q$ est une perpendiculaire élevée au centre de l'hexagone, $p'\,q'$ sera alors sa projection sur le plan de projection horizontale, et P Q sera, sur le plan vertical, la projection de la ligne à inclinaison double trouvée par $p''\,q''$ *et* $p\,q$.

§ 92. — *Problème.* — *Un rectangle* et *un triangle* dont les projections sur le plan vertical sont représentées par les deux droites A B et C E (*fig.* 19), se coupent suivant un angle quelconque A D E; il s'agit de trouver sur le plan vertical la projection de ces deux surfaces, quand leurs projections sur le plan horizontal sont figurées en M, et en outre, quand les deux figures sont inclinées par rapport à leurs deux plans de projection.

Solution. — On commencera d'abord par tracer la figure projetée en M, dans laquelle A' A" B" B' est la projection du rectangle, et C' C" E' celle du triangle (les distances B' B" et C' C" sont ou données ou arbitraires). On transporte ensuite ces figures dans la position exigée par rapport à $x\,y$, de telle sorte que a', a'', b'', $b' =$ A' A''' B" B, et $c'\,c''\,e' =$ C' C" E'; et l'on cherche ensuite sur le plan vertical, et d'après les procédés connus, la projection des points a', a'', b', b'', etc.; et ainsi, $a\,\alpha\,\beta$ sera la projection du rectangle, et $e\,\gamma\,c$ celle du triangle. $d\,\delta$ est la ligne d'intersection des deux plans, figurée dans les deux vues d'en haut par les lignes D' D" et $d'\,d''$.

§ 93. — Si le rectangle représenté par A B en M (*fig.* 20) a une position perpendiculaire au plan de projection verticale, et si le triangle C D E au contraire a une position perpendiculaire à ce plan, alors la projection horizontale du premier fig. N apparaît sous forme du rectangle A' A' B' B', tandis que celle du second apparaît sous celle d'une ligne droite E' C'. La portion G' F' de celle-ci est la projection de la ligne d'intersection G F (*fig.* M) des deux plans. Si on transporte la projection horizontale *fig.* N en *fig.* O, par rapport à la ligne de terre, de telle sorte que $a'\,a'\,b'\,b' =$ A' A' B' B',

et que $e' c' = E' C'$, on trouvera (en suivant la voie suivie pour la représentation des figures précédentes), dans la *fig.* P, le parallélograme *α β b* comme étant la projection du rectangle, le triangle *c d e* comme celle du triangle C D E, et la ligne *f g* comme étant la ligne d'intersection des plans dans la projection P. La construction à employer ici est suffisamment indiquée par les figures mêmes, et on a en outre conservé aux points la même accentuation que dans les autres figures, de sorte que l'on n'a pas besoin d'ajouter d'explications plus détaillées.

§ 94. — Les corps sont limités par des surfaces. On vient de voir dans les paragraphes précédents comment on trouve les projections des surfaces *planes*; par suite, on trouvera celle des corps limités par des surfaces planes, puisqu'on peut considérer ceux-ci comme un assemblage de plans. Comme, d'un autre côté, les plans sont limités par des lignes qui, à leur tour, sont déterminées par des points, il s'ensuit que la projection des corps sera déterminée par celle des points lorsqu'on connait la position de ceux-ci sur les deux plans de projection.

§ 95. — *Problème.* — Un parallélepipède ayant une position parallèle au plan de projection horizontale, apparaît par suite sur le plan horizontal sous la forme d'un rectangle *a b c d* (*fig.* 21); il est au contraire incliné vers la surface du plan de projection verticale, et forme avec ce plan ou avec la ligne de terre *x y* l'angle *z*. Soit encore *e f*, la hauteur du corps; il s'agit de trouver la projection verticale de ce corps.

Solution. — Des points *a*, *b*, *c* et *d* on élève sur *x y* des perpendiculaires, et de *e* on mène une parallèle *x y*; et B D' sera alors la projection demandée dans laquelle les mesures de longueur et de largeur paraissent raccourcies, tandis que celle de la hauteur est restée sans changement. Il est évident que le raccourcissement dépend de l'angle *z*, et que les mesures *b c* et *a d* sont dans un rapport direct avec la grandeur de l'angle, et *a b* et *c d* dans un rapport inverse.

§ 96. — *Proposition.* — Soit A B C D (*fig.* 22, M) une des faces d'un parallélipipède, parallèle au plan de projection verticale, et inclinée au contraire au plan de projection horizontale;

il s'agit d'indiquer d'abord la projection horizontale de ce corps (*fig*. N), et, en second lieu, sa projection verticale (*fig*. P.), lorsqu'il est doublement incliné par rapport aux deux plans de projection.

Solution. — La projection de la fig. N, dans laquelle on peut envisager la distance B' B''' comme étant donnée ou prise arbitrairement, est la conséquence naturelle de la donnée du problème. Si l'on transporte la fig. N dans la position O et que l'on mène par les différents points des perpendiculaires à la ligne de terre x y, leur rencontre avec les horizontales menées par les points correspondants de la fig. M donnera la fig. P.

Si le milieu de ce corps est traversé dans l'espace par la ligne E H, alors E' H' sera la projection de cette ligne dans la vue *fig*. N, e' h' dans la vue fig. O, et e h dans celle de la fig. P, dans laquelle cette ligne est doublement inclinée par rapport à ces deux plans de projection. Les points F, et G, F' et G', f' et g', ainsi que f et g, sont ceux que cette ligne a de commun avec les deux plans figurés par A D et B C (*fig*. M), de telle manière que F G, F' G', f' g' et f g est chaque fois une portion de la ligne qui se trouve dans l'intérieur du corps.

§ 97. — *Proposition*.— Un prisme à six faces, A E (*fig*. 23), a l'inclinaison indiqué dans la fig. M, par rapport à la surface de projection horizontale; il s'agit de faire connaître sa projection horizontale (*fig*. N), ainsi que sa projection verticale (*fig*. P), quand il est incliné par rapport au plan vertical de la manière figurée en O.

Solution.— D'après les indications du § 90, on cherche sur la fig. N la projection des deux plans horizontaux a b c d c b a et c f g h g f c, qu'on relie par les lignes b g, a h, et b g. On transporte cette projection du prisme en *fig*. O, dans une position inclinée à x y, de telle manière que la fig. N et la fig. O deviennent des figures égales, et l'on cherche par fig. M et fig. O la projection de la fig. P, du prisme doublement incliné au plan de projection, ce qui est facile à obtenir par ce qui a été dit précédemment, et à l'aide des mêmes lettres par lesquelles les points correspondants sont désignés.

Si le milieu du prisme est traversé par une ligne droite dans

l'espace, dont la projection dans la fig. M est le point K, dans la fig. N et fig. O les lignes *k k*, il s'ensuivra qu'en P les lignes K K et K K seront les projections de cette ligne.

§ 98.—Si dans la fig. 24, I est la projection verticale d'une pyramide quadrilatère, fig. II sera alors sa projection horizontale. Si l'on donne maintenant à la fig. I la position inclinée fig. III, dans ce cas sa projection horizontale sera représentée en la fig. IV, et si enfin on donne à ce corps la double inclinaison fig. V, on trouvera alors pour sa projection verticale la fig. V, comme il est facile de le voir par les points correspondants désignés par les mêmes lettres.

CHAPITRE III.

De la projection des lignes courbes, des surfaces courbes, des corps terminés par des surfaces courbes et de leur intersection par des plans.

—

§ 99. — La représentation d'une *ligne courbe* se distingue de celle d'une *ligne droite*, en ce que deux points sont seulement nécessaires pour déterminer exactement la position et la longueur de celle-ci, tandis que pour celle-là plusieurs points sont toujours nécessaires. Sa représentation sera d'autant plus exacte que le nombre de ces points sera plus considérable et que l'on pourra ainsi les relier sans le secours d'instruments. Le nombre de ces points à établir est dicté par la plus ou moins grande exactitude exigée pour le tracé de cette ligne courbe, et suivant le degré de sûreté de l'œil et de la main du dessinateur.

Quel que soit le nombre des points exigés pour la représentation d'une ligne courbe, il est toujours nécessaire de donner les *projections de ces points* en suivant les règles que nous avons tracées précédemment.

§ 100.— De même qu'on peut se figurer qu'une *surface plane* est engendrée par une droite qui se meut parallèlement à elle-même dans une direction droite ; de même on peut se figurer qu'une *surface courbe* est engendrée par le mouvement d'une *ligne droite* ou *courbe* suivant une direction courbe.

Si une ligne droite se meut sur la circonférence d'un cercle de telle manière, que cette ligne forme toujours avec la surface du cercle un même angle, et qu'elle reste toujours parallèle avec elle-même, alors cette ligne décrit une *surface cylindrique* et il en résulte un *cylindre droit* lorsque la direction de cette ligne est perpendiculaire à cette surface du cercle, un *cylindre oblique* lorsque cette ligne forme un angle oblique avec cette surface. Une surface cylindrique peut encore être formée lorsque la circonférence qui forme la base (c'est-à-dire une *ligne courbe*), se meut parallèlement à elle-même, de telle manière que son centre reste toujours situé sur la ligne droite qui forme ainsi l'axe du cylindre produit. Si, par suite, cet axe est posé perpendiculairement sur la surface du cercle, il en résultera un *cylindre droit ;* cet axe est-il posé obliquement sur cette surface, le cylindre résultant *sera oblique*.

Si une ligne droite se meut autour d'un cercle, de telle manière qu'une des extrémités de cette ligne subisse seule ce mouvement, tandis que l'autre extrémité reste fixe, cette ligne décrira dans ce cas la surface d'un *cône* dont le sommet est le point fixe et dont l'axe est la ligne qui va de ce point au centre du cercle. Si donc cet axe est perpendiculaire à la surface du cercle, il en résultera un *cône droit ;* si au contraire il est situé obliquement sur cette surface, le *cône sera lui-même oblique ;* il est à remarquer que dans ce dernier cas, la ligne droite dans son mouvement change continuellement de longueur, vu qu'une de ses extrémités, celle qui forme le sommet du cône, reste fixe, tandis que l'autre, en commençant son mouvement sur un point de la circonférence, descend peu à peu audessous du cercle, jusqu'à ce qu'elle ait parcouru la moitié de la circon-

férence, après quoi elle remonte de nouveau et vient, après avoir parcouru l'autre moitié du cercle, rejoindre le point de départ.

Si la ligne courbe à l'entour de laquelle la ligne droite doit se mouvoir n'est pas un cercle, mais une ligne offrant une courbure différente, une ellipse, par exemple, alors il résultera de ce mouvement, non pas un cylindre ou un cône, mais un corps ayant une forme cylindrique ou conique et une base elliptique.

Toute ligne droite ou courbe, qui en se mouvant décrit une surface courbe, reçoit le nom de *génératrice de la surface*, et celle au long de laquelle cette ligne droite est obligée de se mouvoir pour engendrer la surface, comme par exemple, le cercle dans la formation de la surface cylindrique, se nomme *directrice*.

On peut aussi se représenter la génération du cylindre, du cône, de la sphère, etc., par la *révolution* de surfaces autour d'un de leurs côtés, et dans ce cas la surface qui a engendré par sa révolution ce corps nouveau, se nomme *surface de révolution*. Qu'un rectangle, par exemple, se meuve autour d'un de ses côtés, alors le côté opposé à celui-ci décrit une surface cylindrique; qu'un triangle se meuve autour d'un des côtés de l'angle droit, alors l'hypothénuse, dans ce mouvement, décrit la surface d'un cône droit; qu'une surface de forme, demi-circulaire (ou même un cercle entier), se meuve autour du diamètre, alors la courbe qui forme la limite de cette surface circulaire décrit dans son mouvement une surface sphérique. C'est ainsi qu'on peut se représenter la formation d'un corps limité par une ou plusieurs surfaces courbes, comme produite par la révolution d'une surface autour d'une de ses droites, de telle sorte que chaque point extrême de cette surface décrive un cercle.

Cette idée de la génération d'une surface courbe facilite le tracé de leur projection, ainsi que celui de leur intersection et de leurs plans tangents, comme on s'en convaincra par ce qui va suivre.

§ 101. — *Problème.* — La courbe A F L (*fig.* 25) se trouve sur un plan parallèle au plan de projection verticale, elle apparaît dans sa projection sur ce plan sous forme d'une courbe sembla-

ble, tandis que sur le plan de projection horizontale, d'après ce qui a été dit au § 67, elle apparait sous forme d'une droite *l a*: tracer sur le plan vertical la projection de cette ligne courbe, lorsque le plan sur lequel elle se trouve, a reçu relativement à *x y* la position inclinée *l' a'*.

Solution. — On choisit sur le trajet de la ligne A F L. des points à l'aide desquels la forme de la ligne est déterminée, soit B, C, D...; on les projette sur *l a*, on les transporte avec les distances égales sur *l' a'*; de telle manière que *f' a' = fa*, *b' a' = ba*, etc.; on élève dans les points *a'*, *f'*, *b'*, etc., des perpendiculaires et on les coupe en A', B' C', etc., par des horizontales, menées de A, B, C, et la courbe A' F' L', qui résultera de la liaison de ces différents points entre eux, sera la projection cherchée.

L'exactitude de ce procédé est justifiée par ce qui a été dit précédemment et par la simple inspection de la fig. 25.

§ 102. — *Problème.* — Trouver sur le plan de projection verticale, la projection d'*un cercle* dont le plan se trouve perpendiculaire au plan de projection horizontale, fig. 26.

Solution. — Si la projection *b d* du cercle sur le plan horizontal est parallèle à *x y*, alors sa projection apparaitra sur le plan vertical sous la forme du cercle A B C D. Si la projection *b' d* du cercle sur le plan horizontal est perpendiculaire à *x y*, alors sa projection sur le plan vertical sera la *ligne droite* A' C'. Si au contraire la projection *b' d* du cercle forme avec *x y* un angle oblique, alors on élève en *b'* et *a'* des perpendiculaires sur *x y*, on coupe ces lignes en B', A' et C' par d'autres lignes horizontales menées des points B, A et C, et l'on obtient par là et à l'aide du point D, déjà quatre points de la ligne courbe cherchée. Maintenant, pour déterminer sur la courbe que l'on veut tracer les points marqués en E, F, G et H, sur la circonférence du cercle, on fait usage du procédé indiqué dans le § précédent, et l'on obtiendra ainsi les points E', F', G' et H', qui, étant reliés par une courbe A' B' C' D', donnent la projection de la circonférence demandée. Il va sans dire, que si le nombre des points choisis pour la détermination exacte de la courbe n'étaient pas suffisants, l'on pourrait au besoin les multiplier. Il s'ensuit que la projection d'une circon-

férence ayant une certaine inclinaison vers la surface du plan apparait sous la forme d'une ellipse, et, comme il est facile de s'en convaincre, le diamètre horizontal est, dans ce cas, bien plus petit (§ 65), puisque B' D est la projection de *b' d*, tandis que le diamètre vertical n'éprouve aucune modification, A' C' = A C.

§ 103. — On donne le nom d'*ellipse* à la courbe qui résulte de la projection d'un cercle ou d'une surface circulaire sur un plan incliné à ce cercle. Une ellipse a la forme d'un rond allongé, et présente dans le sens de sa longueur deux diamètres distincts et perpendiculaires l'un à l'autre; le grand diamètre se nomme le *grand axe* de l'ellipse, et le petit diamètre *petit axe* de l'ellipse. Ainsi, par exemple, dans la figure 26, A' C' sera le grand axe, et B' D le petit axe.

Dans le dessin des machines, des objets d'architecture, d'artillerie, et en général des arts, on est très souvent dans la nécessité de faire usage de cercles, formant un angle oblique avec le plan et qui, par suite, apparaissent dans la projection sous forme d'une ellipse. Il est donc nécessaire et commode pour le dessinateur de lui faire connaître les moyens de construction d'une pareille ellipse, car jusqu'à présent les instruments appelés *cercle à tracer les ellipses* ne peuvent répondre à tous les besoins.

Quoique chaque ellipse ait une forme ovale, il ne s'ensuit pas cependant que chaque ovale régulier, composé de plusieurs arcs de cercle, soit une ellipse; en effet, cette courbe ne saurait se représenter par une suite d'arcs de cercle, à moins que l'on ne multipliât leur nombre à l'infini, ce qui embarrasserait le travail et encore ne serait qu'une approximation de l'ellipse réelle.

§ 104. — *Problème.* — Les deux axes *ab* et *cd* d'une ellipse étant donnés, il s'agit de décrire cette ellipse.

1° *Solution.* — On divisera la ligne *ab* (fig. 27) par le point *e* en deux portions égales, et l'on élèvera en *e* sur *ab* une perpendiculaire *cd*, de telle sorte que *ce*=*ed*. Si donc *ab* est le grand axe et *dc* le petit axe de l'ellipse, l'on aura déjà trouvé 4 points pour le tracé de cette courbe. Il s'agit donc d'établir dans les intervalles de ces points, plusieurs autres points à l'aide des-

quels on parvienne à tracer facilement et exactement l'ellipse entière en question.

Si, avec une ouverture de compas égale $=$ à $ac \frac{1}{2} ab$, on décrit du point c pris comme centre l'arc fgf', celui-ci coupera la ligne ab dans les points f et f' ; or, ces deux points seront les *foyers* de l'ellipse. On choisit ensuite un point quelconque sur la ligne ab, soit h, on décrit d'abord du point f et f' avec l'ouverture du compas ah, puis avec celle de bh, les sections i, i', i'' et i''' tant au-dessus qu'au-dessous de la ligne ab, et on aura autant de points qui se trouveront sur le contour de l'ellipse. On choisit encore un autre point quelconque sur ab, soit h', et on trace de f et f' avec l'ouverture de compas ah' bh', les sections k et k', k'' et k''' : ces points se trouveront de même situés sur le contour de l'ellipse. Si enfin on trace par les points a, i, k, c, k'', i'' b, i''', k''', d, k' et i' une courbe, celle-ci sera l'ellipse demandée.

Cette méthode est basée sur cette propriété de cette courbe, savoir que si d'un point quelconque du contour de l'ellipse on mène des lignes droites aux deux foyers, la somme de ces lignes devra toujours être égale à la longueur du grand axe de l'ellipse. Ainsi dans la fig. 27, $fi + if' = ab$, $fk + kf' = ab$, $fc + cf' = ab$, $fk'' + k''f' = ab$, etc.

2° *Solution.* — On place les deux axes de l'ellipse dans une position perpendiculaire l'un à l'autre, en observant que leurs milieux se coupent en un point o (*fig.* 28). On détermine les deux foyers f et f' en suivant les indications données plus haut, et on fixera en ces points une aiguille ou un stylet. Après quoi, on prend un fil ou un cordeau auquel on donne la longueur du grand axe, c'est-à-dire égal à ab ; on fixe solidement ses deux extrémités aux stilets placés en f et f', et avec un crayon ou tout autre instrument pointu, on trace un trait en suivant l'extrémité du fil qu'on maintient toujours tendu. La pointe du stylet passera ainsi par les points d, d', d'' et d''', etc., comme aussi par a, c et b, et décrira une ellipse, puisque, chose facile à prévoir, la somme des distances de chaque point d, d', d'' et d''', etc., des deux foyers, restera toujours égale à la longueur du grand axe.

Quelque simple et exact que soit ce procédé, il présente

cependant un inconvient, c'est qu'il est impossible de l'utiliser lorsqu'il s'agit de tracer sur le papier une très petite ellipse, puisque non-seulement ces aiguilles formeraient dans le papier des trous, mais que l'ellipse tracée manquerait d'exactitude à cause de la difficulté de maintenir dans une position toujours droite sur le papier ledit stylet, que le fil s'éloignerait plus ou moins et pourrait glisser. Le cas est différent s'il s'agit d'établir une ellipse d'une grande étendue, par exemple sur le sol, ou de tracer une arcade elliptique : aucun moyen n'est aussi avantageux que celui-ci, car toutes les difficultés ou fautes disparaissent ou sont inappréciables à cause des grandes distances.

Pour tracer sur le papier une ellipse d'une petite étendue, aucun moyen n'est préférable à celui que nous allons faire connaître.

3ᵉ *Solution*. — On prend un petit morceau de papier épais, une carte à jouer, par exemple (*fig*. 29, B). On donne à un de ses côtés **a' e'** une longueur égale à la moitié du grand axe **ab**, on marque encore sur ce côté la distance *a' h'* = *c e* (*fig*. A), c'est-à-dire égale à la moitié du petit axe *cd*, ainsi *h' e'* sera la différence des deux moitiés d'axes. On donne à cette petite carte la forme du rectangle *a'*, *e'*, *f*, *g*. La largeur *e' f* est indifférente, cependant il faut faire attention que la longueur de cette ligne soit en rapport, comme ici, avec les axes de l'ellipse. La ligne *h' i* devra être tracée parallèlement à *a' g*. Après quoi on place cette petite carte ainsi préparée (*fig*. B) sur une des demi-longueurs du grand axe de l'ellipse (*fig*. A), de telle sorte que le point *a'* (*fig*. B) de la carte corresponde au point *a'* de la *fig*. A, le point *e'* (*fig*. B) avec le point *e* (*fig*. A) ; puis on imprime un mouvement à la petite carte, en observant que le point *h* de cette carte reste toujours fixe sur la ligne *a b* ; que le point *c* de la ligne *c d* s'avance graduellement de *e* en *d*. De cette manière, le point *a* décrira le quart d'ellipse *a c*, et à l'aide d'un crayon, l'on peut ainsi très facilement déterminer sur le contour de l'ellipse autant de points qu'on le jugera nécessaire pour son tracé, puisque l'on est maître de donner à la petite carte autant de positions que l'on veut entre les points *a* et *c*, du quart de l'ellipse. On agira de même pour déterminer les portions *cb*, *bd*, *da*, en se rappelant que le point *h'* du rectangle (*fig*. B) de la petite carte

reste toujours fixé sur le grand axe de l'ellipse, et le point e' sur le petit axe de cette ellipse, ainsi que nous l'avons figuré par des lignes ponctuées dans la fig. A. Il va sans dire que l'on pourrait aussi bien employer les points i, f, et g de la petite carte que les points a', h et e' desquels on a fait usage ici pour le tracé de l'ellipse.

(*Preuve*). — Il s'agit de montrer que la courbe, tracée à l'aide du point a' de la ligne $a'\,c'$ (*fig.* 29), est *une ellipse*, si cette ligne se meut, en ayant son point h' sans cesse fixé sur le grand axe, et son point c' sur le petit axe de l'ellipse, et lorsque $a'\,e'$ est égale à la moitié de la longueur du grand axe, et $a'\,h'$ à la moitié de celle du petit axe.

On élève (*fig.* A) sur ab la perpendiculaire $a'\,n$, et on mène $a'\,m$ parallèlement à ab.

Eu supposant $a'\,n = y$.
$a'\,m = n\,c = x$.
$a'\,e' = a$.
et $a'\,h' = b$.
on aura $\Delta\, a\,e'\,m \backsim \Delta\, h'\,e'\,e \backsim \Delta\, a'\,h'\,n$.
donc $a'\,e' : h'\,e' = a'\,m : h'\,e$.
et $a'\,h' : h'\,e = a'\,n : e\,e'$.

Si dans les deux proportions on met les valeurs ci-dessus :

on aura $a : a - b = x : h'\,e$.
et $b : a - b = y : e\,e'$.
mais de là $h'\,e = \frac{a-b}{a}\,x$
et $e\,e' = \frac{a-b}{a}\,y$
et comme $(h'\,e')^2 = (h'\,e)^2 + (e\,e')^2$;
on a $(a-b)^2 = \left(\frac{a-b}{a}\right)^2 x^2 + \left(\frac{a-b}{b}\right)^2 y^2$.
ou $(a-b)^2 a^2 b^2 = (a-b)^2 b^2 x^2 + (a-b)^2 a^2 y^2$
donc $a^2 y^2 = a^2 b^2 - b^2 x^2$
par suite $a^2 b^2 = b^2 x^2 + a^2 y^2$
en définitive $y^2 = \frac{b^2}{a^2}\,(a^2 - x^2)$.

Ceci étant, par rapport au *point central* e, l'équation d'un ellipse pour la moitié du grand axe $a'\,e'$, et pour la moitié du petit axe $a'\,h'$; alors a' est un point de l'ellipse, et ceci pouvant

s'appliquer à tout autre point a', il s'ensuit qu'à l'aide du procédé indiqué on parvient toujours à tracer une ellipse.

§ 105. — En général, il y a encore à remarquer, que si l'on prolonge d'une quantité égale les deux extrémités des axes d'une ellipse et que l'on décrive une nouvelle ellipse par la méthode ci-dessus, cette nouvelle ellipse ne sera nullement *parallèle* à la première, attendu qu'il est tout-à-fait impossible de tracer deux ellipses parallèles, et si les circonstances exigeaient que l'on traçât de pareilles courbes parallèles entre elles, comme, par exemple, pour la construction d'une voute elliptique également épaisse en tous sens, dans ce cas, la ligne extérieure sera une courbe différente de celle de l'ellipse intérieure, et réciproquement.

§ 106. —*Problème.* — Si la droite A B (*fig.* 30) est la projection d'une *circonférence* qui est située perpendiculairement au plan de projection verticale, et qui forme, au contraire, l'angle a avec le plan de projection horizontale ; il s'agit de trouver sur ce dernier plan la projection de cette circonférence.

Solution. — On choisit des points quelconque, tels que D,E, par exemple, et on détermine, par des perpendiculaires abaissées des points A,E,C,D, et B sur la ligne ab menée parallèlement à xy, les points a, n, o, m et b ; on décrit par A B un cercle, l'on fait $nc = ne =$ EE'', $oc = oc = cc''$ et $md = md =$ DD'', on relie ensuite ces points a, e, c, d par une courbe, et l'ellipse $acbca$ sera la projection du cercle. En effet, si l'on représente le cercle figuré par A B rabattu, auquel cas il apparait sous la figure du cercle A I' B C', on obtiendra par là la longueur des cordes passant par D et E, et ensuite la longueur des cordes correspondantes ee et dd, par lesquelles les points de l'ellipse ont été déterminés.

Mais cc étant là le plus grand axe de l'ellipse et ab le plus petit, et comme ces deux axes sont faciles à obtenir à l'aide de A B, puisque ab est la projection de A B, et que cc doit être égal à A B, (parce que cc donne la longueur réelle du diamètre représenté par c); on arrivera alors plus promptement au but, en ne cherchant que ces axes et en employant une des méthodes indiquées plus haut, § 104, parmi lesquelles la troisième est la meilleure, comme nous l'avons fait remarquer.

§ 107. — *Problème.* — Tracer la projection d'un cercle

doublement incliné au plan de projection verticale, lorsque le diamètre AB (*fig.* 30) de ce cercle et les deux angles d'inclinaisons α et β avec les plans vertical et horizontal sont donnés.

Solution. — On cherche d'abord, comme dans le paragraphe précédent, la projection *acbca* du cercle sur le plan horizontal. Ceci a-t-il été fait suivant les indications du § 104, on choisit sur AB les points arbitraires D et E, et on détermine leur projection dans l'ellipse, savoir en *e*, *d*..... alors on trace cette ellipse au-dessous de xy en passant par tous ces points, lui donnant relativement à cette ligne xy une position telle que son petit axe $b'a'$ forme avec xy l'angle β, on élève des points a', c', c', d', etc., des perpendiculaires sur xy, et on coupe leur prolongement par d'autres lignes horizontales, menées de A. E, C, D, en A′, E′, C′, D′; si enfin on relie ces points par une courbe, on aura trouvé la projection demandée. En effet, les distances verticales de ces points à la ligne xy sont restées égales à celles de leurs points correspondants sur AB, et leurs distances au plan de projection verticale ont été données par la projection horizontale, la position de celle-ci ayant été déterminée par l'angle β.

§ 108. — La projection d'une ellipse étant de même une ellipse (à moins qu'elle n'apparaisse sous la forme d'une droite ou d'un cercle, et nous en parlerons plus loin), alors A′, C′, B′, C′, A, sera aussi une ellipse; toutefois, ni A′B′ sera son grand axe, ni $c'c'$ son petit axe. S'il s'agissait d'indiquer ces deux axes, voici comment il faudrait procéder : on tracerait, suivant les indications du paragraphe précédent, l'ellipse $a'c'b'c'$; par son centre o', on tirerait une ligne $f'g'$ parallèle à xy: des points f' et g', on mènerait les deux perpendiculaires fp et gq sur xy; avec une ouverture de compas égale à AC, on décrirait de o' comme centre les intersections de ces perpendiculaires en F et G; par là, FG sera le grand axe demandé. Car, puisque fg a été mené parallèlement à xy, il s'ensuit que la ligne FG, qui se trouve dans un plan perpendiculaire passant par fg, sera le diamètre lui même du cercle à projeter, diamètre qui est parallèle à ce plan de projection verticale, c'est pourquoi il devra se projeter dans sa véritable grandeur.

Mais pour trouver la longueur du petit axe de cette ellipse, qui doit se trouver placé *perpendiculairement* sur F G, on projettera les point F et G suivant A B, en *f* et *g*; on se représentera de nouveau le cercle indiqué par A B comme étant rabattu, et l'on projettera les points *f* et *g* sur la circonférence en F' et G', et l'on aura alors F' G' qui sera le diamètre exprimé par F G. Mais comme le petit axe doit être situé perpendiculairement sur le grand axe, alors on tracera le diamètre H' I' perpendiculairement sur F' G', on projettera de nouveau les points H' et I' de A B en *h* et *i*, on élèvera sur F G au point O' une perpendiculaire que l'on coupera en *h* et *i* par des lignes parallèles à *x y* jusqu'aux points H et I. Par suite H I sera le petit axe de l'ellipse.

S'agit-il ensuite de tracer les projections du cercle doublement incliné, on cherchera alors, suivant le § 104, l'ellipse *a c b c*, d'après A B; on transportera celle-ci en *a' c' b' c'* sous l'angle donné β, on déterminera par C et *o'* le centre O et l'on cherchera ensuite, par la méthode que nous venons d'indiquer, les deux axes F G et H I, à l'aide desquels on est à même de construire *l'ellipse* suivant le § 104.

§ 108. *a* — *Problème.* — Tracer au point donné *t*, une *tangente* à la circonférence de l'ellipse *a b c d* (*fig.* 30).

Solution. — On commence par déterminer, comme dans la *fig.* 27, les foyers *f* et *f'*; de ces points on mène en *t* les lignes *f t* et *f' t*, et l'on partage l'angle résultant *f t f'* en deux parties égales *f t g* = *g t f'*, ce qui s'obtient en faisant *t h* = *t h'*; puis, menant de *h* et *h'*, les deux rayons égaux *h g* et *h' g*, on fera passer par leur intersection *g* la ligne *k g*. Enfin, sur cette dernière on élève au point *t* la perpendiculaire *m n*, qui sera la tangente cherchée de l'ellipse.

Pour mener aux points *a* ou *d* des tangentes à l'ellipse, il suffit d'élever sur *a b* au point *a* la perpendiculaire *q r* ou sur *c d* au point *d* la perpendiculaire *o p*.

§ 109. — La *fig.* 31 fait voir comment on représente sur un plan vertical la projection d'une ligne courbe à inclinaison double, lorsque celle-ci a la forme de la *fig.* M, lorsque d'autre part α est l'angle que le plan de cette courbe fait avec le plan de projection horizontale, et que β est l'angle que le

plan de cette même courbe fait avec le plan de projection verticale. AD de la *fig.* 1 est la projection de la *fig.* M, *fig.* 2 est la projection de la *fig.* 1, *fig.* 3 est semblable à la *fg.* 2, mais placé par rapport à $x y$ suivant l'angle β; et *fig.* 4 est la reproduction de la *fig.* 3 et *fig.* 1.

De même que pour l'intelligence de la figure, il faut se représenter le plan de projection horizontale placé au-dessous de $x y$ tournant au tour de cette ligne jusqu'à ce qu'il se trouve perpendiculaire au plan de projection verticale, de même il faut aussi se représenter le plan dans lequel est tracé la *fig.* M, tournant autour de la ligne AD, jusqu'à ce qu'elle soit perpendiculaire au plan de projection verticale, et que la ligne droite AD soit la projection de la ligne courbe ou duplan.

Le dessinateur reste libre du choix à faire des points A, B, C, D... dans la *fig.* M, par lesquels la courbe est déterminée; toutefois il est nécessaire que leur position et leur nombre soit déterminé en partie d'après la forme, en partie d'après l'exactitude que l'on peut donner à la figure.

§ 110. — On donne le nom de courbes *à simple courbure* à celles qui se trouvent tout entières dans un plan; et toutes les courbes desquelles il a été question jusqu'à présent sont de cette espèce. On donne au contraire le nom de *courbes à double courbure* à celles qui ne se trouvent pas sur un plan et qui ne sauraient y être enfermées, mais qui se trouvent sur une surface *courbe*. Ces lignes sont formées par un point qui ne se meut point dans un même plan; elles sont formées par exemple lorsqu'on trace à la surface courbe d'un cylindre ou d'un cône, des lignes courbes quelconques.

Dans la projection d'une ligne courbe à double *inclinaison* sur une plan l'image de cette ligne ne peut jamais apparaître dans sa véritable grandeur, ou comme une ligne droite, comme c'était le cas pour les lignes à simple courbure (§ 67); Mais la projection se présente toujours sous forme d'une courbe qui s'écarte plus ou moins de la forme primitive; elle peut aussi apparaître sous forme de circonférence ou de partie de circonférence, quand, par exemple, la courbe est tracée à la surface d'un cylindre droit, et qu'on la projette sur la base circulaire du cylindre, auquel cas sa projection viendrait se

confondre avec la circonférence qui est la projection du cylindre.

§ 111. — Pour arriver encore à une connaissance plus parfaite de la nature des lignes à double courbure, il faut observer ce qui suit : lorsqu'un plan est coupé par un autre plan, la ligne d'intersection sera une ligne droite ; si c'est une surface courbe qui est coupée par un plan, l'intersection sera une ligne à simple courbure ; mais si ce sont deux surfaces courbes qui se coupent, l'intersection sera une ligne à double courbure. Donc, si un cône est coupé par un plan, l'intersection sera un cercle, ou une ellipse, ou une parabole, ou une hyperbole (nous parlerons plus loin des deux dernières figures), et toutes ces lignes sont composées de courbes à simple courbure, et en même temps forment des sections côniques. Il y a encore à remarquer que si la section est faite par le sommet du cône, il n'en résulte jamais un triangle composé de lignes courbes, mais toujours un triangle rectiligne, soit que la section soit oblique ou perpendiculaire à la base du cône ; dans ce dernier cas, il passe dans le cône droit, par l'axe et est appelé *section principale* pour le distinguer des sections obliques. Si la surface conique est coupée par une surface courbe quelconque, l'intersection qui en résulte est en général une courbe à double courbure.

§ 112. — Comme ces lignes à double courbure varient extrêmement de forme, puisque non-seulement celle-ci change à chaque section dirigée différemment, mais que leur figuration sur des surfaces courbes peut se faire de tant de manières, il s'ensuit qu'il est difficile de ranger ces courbes en un certain nombre de classes, comme on a pu le faire pour les courbes à simple courbure. Cependant ces lignes se rencontrent si fréquemment dans le dessin des arts, qu'il est indispensable au dessinateur d'en avoir une connaissance plus approfondie, afin d'éviter les fautes qu'il commettrait infailliblement s'il en ignorait la substance.

Dans les paragraphes suivants, nous ferons connaître la manière de tracer quelques-unes de ces lignes à double courbure.

§ 113. — Si sur les côtés *a b* et *c d* d'un rectangle quelconque *a b c d* (*fig.* 32) on porte plusieurs parties égales *a ė* = *e*

$f = fg = de' = e'f' = f'g'$, et que les points ainsi obtenus soient reliés par les droites *a e'*, *e f'* et *f g'*, et qu'on se représente ensuite ce rectangle comme étant le développement d'un cylindre, dans lequel *a d* et *b c* seraient le développement des circonférences des bases, dans lequel les lignes *a b* et *c d*, et par conséquent les points *e* et *e'*, *f* et *f' g* et *g'* se confondent; dans ce cas, les lignes *a e'*, *e f: f g'*, etc., formeront une ligne courbe non interrompue. *a' h e' i f' k*..... s'enroulant sur la surface extérieure du cylindre qui reçoit le nom de hélice. L'angle *e' a d* se nomme *inclinaison de l'hélice*, *a' h e' = a e'* se nomme un *pas de l'hélice*, et la distance d'un pas à l'autre, mesurée parallèlement à l'axe *a' e' = a e*, se nomme *la hauteur d'un pas de l'hélice*.

§ 114. — *Problème.* — *a' n* le diamètre du cylindre *a' n m b'* (*fig.* 32), *a' c' = d e'* la hauteur du pas et de plus l'angle *e' a d* étant donné, construire l'hélice.

Solution. — On prolonge l'axe du cylindre, sur un point quelconque de ce prolongement, en *o* par exemple, on décrit avec la moitié du diamètre du cylindre un cercle que l'on partage en un nombre de portions arbitraires en 8, par exemple, comme ici. Après quoi on prolonge aussi la ligne *a' n*; l'on fait, suivant les indications du § 47 ou 48, la ligne *a d* égale à la circonférence du cercle indiqué par *a' n*, et sur *a d* on élève le rectangle *a b c d*, de telle sorte que *a b = a' b'*. La distance *a' c' = a c = d e'* (qui est la hauteur du pas de l'hélice), est portée successivement sur les côtés *a b* et *c d*: sur *a d* au point *a* on mène l'angle donné *é a d*, on trace les lignes *a c'*, *e f'*, etc.; d'autre part, on divise la droite *a d* en autant de parties égales que primitivement on a divisé la circonférence du cercle, c'est-à-dire en 8, et sur les points de partage 1, 2, 3, etc., de la ligne *d d* on élève les perpendiculaires 1. 1, 2. 2, 3. 3, etc. On élève de même des points de division 1, 2, 3, etc., du cercle des perpendiculaires sur *a' n*, et l'on mène des points I, II, III, IV, etc., qui sont l'intersection des lignes 1, 2, 3, 4, etc., des perpendiculaires à *a d* avec les lignes *a é*, *e f*, *f g*, des parallèles à *a d* que l'on prolonge jusqu'à ce qu'elles viennent couper en α, β, γ, δ, etc., les perpendiculaires précédemment élevées sur *a' n*. On relie enfin ces

points par la ligne courbe $a' \, h \, e'' i' f \, k' g' l$, et l'on aura l'hélice cherchée. Les portions tracées en plein sont celles sur le devant cylindre; celles ponctuées se trouvent sur sa partie postérieure.

On peut trouver de deux manières le point l dans lequel l'hélice coupe en haut la ligne $b' \, m$, premièrement : du point p dans lequel la ligne prolongée $g \, r$ rencontre la perpendiculaire 4. 4, on mène une ligne parallèle à $b \, c$, qui détermine sur la face prolongée $m \, n$ du cylindre le point q, où viendrait aboutir la portion $g' \, l$ de la ligne spirale prolongée. Deuxièmement : du point d'intersection r du rectangle $a \, b \, c \, d$ on abaisse une perpendiculaire $r \, s$ sur $a \, d$, on fait sur la circonférence du cercle l'arc de cercle $3 \, s'$ égal à la portion $3 \, s$ de la ligne $a \, d$, et on élève en s une perpendiculaire sur $a' \, n$ qui coupera $b' \, m$ en l. Cette dernière méthode peut offrir quelque inexactitude dans le cas où $3 \, s$ n'est pas la moitié, le tiers ou le quart, etc., de la portion 3. 4 établie sur la ligne $a \, d$, à cause de la différence de mesure de la corde et de l'arc; mais on peut y remédier en établissant encore de nouveaux points entre 3 et 8.

Comme le rectangle $a \, b \, c \, d$ est le développement du cylindre sur lequel les lignes droites $a \, e'$, $e \, f'$, etc., figurent les hélices cherchées sur ce cylindre, et comme aussi bien la circonférence du cercle décrit du point o, comme centre, et la ligne $a \, d$ qui est son développement sont partagés en un nombre de divisions égales; il résulte de la construction donnée que les points d'intersection α, β, γ, δ, etc., doivent être les projections des points I, II, III, IV, etc., sur la surface cylindrique, puisque en menant par ces points des verticales, on a les mêmes distances que l'on a déjà eues de I, II, III, etc., sur $a \, d$, et que α, B, et les distances horizontales de ces points sur le cylindre correspondent à celles sur son développement, ainsi qu'on l'a obtenu en divisant la circonférence o et la droite $a \, d$ en un même nombre de parties égales. Par suite, $a' \, h \, e'$ sera cette portion de l'hélice développé en $a \, e'$; $e' \, i f'$ celle développée en $e \, f'$; $f' \, k \, g'$ celle développée en $f g'$, et enfin $g \, l$ celle développée en $g \, r$.

Il est évident que l'on trouvera l'hélice d'autant plus exactement, qu'on aura admis un plus grand nombre de points de division entre le cercle et la ligne.

§ 115. — Il est aisé de démontrer que *a' e'*, ainsi que la distance *t u*, prise sur l'axe, sont divisés par des lignes partant de I, II, III, IV, etc., menées parallèlement à *a d*, en autant de parties que la ligne *a d* elle-même a été d'abord divisée. C'est pourquoi lorsqu'il s'agira de la construction d'une hélice, il ne sera pas nécessaire de tracer d'abord le rectangle *a b c d*; on y arrivera plus simplement par la méthode suivante.

On divisera soit *a' e'* ou bien *t u* (c'est-à-dire la hauteur du pas) en autant de portions égales que l'on a divisé la circonférence de la projection horizontale (comme ceci a eu lieu en *e' f'* ou *v w*), et de ces points de partage on mènera des parallèles à *a' n*, que l'on prolongera jusqu'à leur rencontre avec les lignes menées par les points de divisions du cercle 1, 2, 3, etc., en *?*, *ε*, *γ*... Si l'on joint ces points par une courbe, on obtiendra encore l'hélice.

§ 116. — Il s'agit de tracer une vis à filet carré, lorsque les diamètres *a b* et *c d* des deux cylindres (*fig.* 33), ou la largeur *a c* du filet et la hauteur *a f* du pas de vis, sont donnés, et si, d'autre part, la hauteur *e f* de l'espace renfermé entre les filets, est égale à l'épaisser du filet *a c*.

Solution. — Sur les deux côtés du grand cylindre on porte plusieurs fois la distance $a c = e f = f i = b g = g h = h k$, etc., ou même les lignes *e g*, *f h*, *i k*, etc., après quoi on construit suivant les indications du § 114, la spirale *a g f k*... et celle qui lui ressemble *e h i l*,.... comme aussi la spirale du petit cylindre *c m u*... et celle qui lui ressemble *o p q*... et on exécute tout le dessin en suivant les données indiquées dans la figure 33. Mais comme on ne peut pas voir dans cette figure la partie du filet qui se trouve sur le côté opposé de la vis, et qu'il n'est pas nécessaire de représenter, on arrivera plus facilement au but en construisant sur deux feuilles séparées les deux moitiés de lignes spirales *a g* et *c m*, d'après les donnés du § 114, on les découpe sous forme de patrons (1), et on les applique successivement sur chacun des points *a e*, *c f*, *b g*, *g h*, etc.,

(1) On choisira de préférence un morceau de papier fort, un petit morceau de carte, de parchemin, et de préférence une feuille de corne.

et on trace le long de leurs rebords les courbes qui se montrent dans la figure. De cette manière, le tracé demandé de la vis à filet pourra s'exécuter d'une manière exacte et facile.

Il n'est pas besoin de dire que pour l'exécution de ces patrons, on n'a besoin de prendre que la moitié de la hauteur des pas de vis, savoir *nh*, *fig.* 32 et la partager en un même nombre de parties que la demie circonférence du plan horizontal, ou la partie *a* 4 de la ligne *ad*, attendu qu'ici on ne cherche à connaitre que la portion *a' h* de l'hélice, et l'on peut utiliser aussi ce même patron pour l'autre moitié *he'* de l'hélice spirale, car il est évident que les deux portions *a' h* et *h e'* de cette courbe doivent être semblables.

§ 116 (*a*). — Si l'on admet le diamètre *cd* (*fig.* 33) du cylindre intérieur bien plus petit que le diamètre *ab* du cylindre extérieur, et en même temps la hauteur *bg* du pas de vis bien plus grande, dans ce cas on emploie, suivant ce qui a été dit dans le paragraphe précédent, le procédé que l'on suit en général lorsqu'il s'agit de construire *un escalier tournant*, pour figurer aussi bien les courbures des limons, que les points où s'assemblent les marches, et en général tout l'ensemble de l'escalier.

§ 117. — *Problème.* — Tracer dans la figure 34 la coupe de l'écrou de la vis (*fig.* 33).

Solution. — Toujours suivant le § 114, on cherche les deux courbes *eb* et *od* (*fig.* 34), on découpe d'après eux les deux patrons, (§ 116), et on procède ensuite de la même manière que nous l'avons enseigné pour les cas précédents. On se convaincra facilement de l'exactitude de cette construction par un examen attentif de la *fig.* 34, et sa comparaison avec celle de la *fig.* 33; on s'en convaincra d'autant plus vite, que dans les deux figures on a donné aux mêmes points de chaque figure les mêmes lettres.

De cette comparaison il résultera encore que les parties visibles de l'écrou doivent tourner en cens contraire des parties visibles de la vis, puisque les parties cachées de la vis sont celles qui s'adaptent dans les parties visibles de l'écrou.

§ 118. — *Problème.* — Tracer une vis dite *à filet triangulaire*, lorsque les deux diamètres *ab* et *cd*, ainsi que la hauteur du pas de vis *bh*, sont donnés (*fig.* 35).

Solution. — On divise la hauteur du pas de vis *b h*, de même que les deux circonférences concentriques du plan horizontal décrits avec *oa'* et *o c'* en un même nombre de parties égales, en 12 par exemple, et l'on construit les deux lignes spirales *a g f* et *d i k*, d'après ce qui a été indiqué dans le § 114, et comme on le voit dans la fig. 35; on trace les lignes de même direction *a g*, *i k*, *f m*, etc., de ces hélices, et on relie les points *a*, *i*, *f*, *l*, etc., de même que *d*, *g*, *k*, *m*, etc., par des droites.

§ 119. — Pour tracer l'écrou (*fig.* 36) qui convient à cette vis, on suivra exactement les indications des paragraphes précédents, mais dans cette figure concave, on ne ponctuera point les lignes *i d*, *f g*, *l k*, comme dans la *fig.* 35, on les tracera en plein; on indiquera ainsi les profondeurs dans lesquelles viennent s'ajuster les filets cachés de la *fig.* 35.

Dans les deux figures, les triangles *a i f*. *i f l*, *d g k*, *g k m*, etc., sont semblables et égaux, ainsi que cela est facile à démontrer.

§ 120. — *Problème.* — Donner en projection verticale (*fig.* 35) la coupe de cette vis par un plan passant par l'axe.

Solution. — Soit la ligne 2, 7, la projection de ce plan sécant sur le plan de projection horizontale. On élève des points 2, *n'*, *p'* et 7, où cette ligne coupe les cercles concentriques du plan horizontal, des perpendiculaires sur *a b*; et l'on obtient à leur aide, sur le filet triangulaire figuré par A B, les triangles égaux 2 *n* 2, si l'on réunit par des droites les points dans lesquels ces lignes coupent les parties correspondantes des hélices *r s*, A B et *l q*; et l'on obtient aussi les triangles égaux 7 *p* 7, si l'on réunit les points dans lesquels les portions C B qui se trouvent sur la face opposée, *r q* et A *m* des hélices. Comme après cela, ce qui est aisé à prévoir, ces triangles se répéteront pour chaque filet, alors les côtés *n* 2 et *p* 7 de tous ces triangles formeront le contour de la surface sécante dans la hauteur de la vis.

Si d'autre part on admet que sur les lignes 1. 6, 4. 9, et 5. 10 se trouvaient établis des plans perpendiculaires, l'on trouverait de la même manière les triangles égaux qui forment l'intersection de la vis avec ces plans, avec cette remarque, que

ces triangles deviennent d'autant plus petits qu'ils approchent davantage de la projection de l'axe de la figure, et d'autant plus grands qu'ils s'en éloignent davantage, de telle sorte qu'ils apparaissent sous forme d'une ligne droite dans leur projection du plan sécant 3, 8, et qu'ils apparaissent dans leur véritable grandeur quand ils sont la projection du plan sécant *a' g'*.

§ 121. — Si enfin on se représente le cylindre intérieur de la vis entièrement supprimé, dans ce cas le filet tournant forme une prisme carrée, tourné en hélice (*fig.* 37). Dans ce cas il ne faut pas que les hélices de derrière soient ponctuées dans le dessin; elles devront au contraire être tracées en plein dans tous les points où elles ne seraient pas recouvertes par les filets antérieurs. Les côtés *dm*, *on*, etc., du cylindre intérieur indiqués dans la *fig.* 33, doivent être entièrement supprimés dans ce dessin. La représentation d'une semblable figure se fait du reste tout-à-fait suivant les indications du § 114 et 116, et on peut le voir facilement par la *fig.* 37, sans qu'il soit nécessaire d'y ajouter d'autres détails.

Qu'un corps soit composé de l'assemblage de plusieurs morceaux, qui offrent sur le plan horizontal la forme de *abdc*, *cdfe*, etc., et si l'on doit donner en projection verticale les plans de coupe suivant lesquels ces morceaux se rejoignent; on n'aura qu'à élever dans les points *a*, *b*, *c*, *d*, etc, des perpendiculaires sur la ligne de terre, et réunir par des droites les points où elles coupent les hélices correspondantes, comme on peut le voir en A et B. Les rectangles résultants sur le plan vertical sont donc, ce qui est facile à voir, les projections des coupes demandées. Il sera facile d'employer ce procédé lorsqu'il sagira de figurer les morceaux de limons d'un escalier.

§ 122. — *Problème.* — Trouver les projections horizontale et verticale d'une spirale qui s'enroule sur un cône droit, *ioa'*, (*fig.* 38, A) quand le diamètre de la base du cône et la hauteur de ce cône sont donnés.

Solution. — On trace la base du cône (*fig.* B) et on partage sa circonférence en un nombre quelconque de parties égales, en 8 par exemple, *a*, *b*, *c*, *d*, etc. De ces points de division on élève les perpendiculaires *bhp* et *dfq* sur *ia'*, et l'on mène dans la *fig.* A les lignes *op* et *oq*. Après quoi on par-

tage la hauteur *oc'* en 4 parties environ, $c'k = kl = lm = mo$, dont chaque partie doit donner la hauteur d'un pas. On divisera d'autre part chacune de ces parties en autant de parties égales qu'on aura divisé la circonférence de la base, c'est-à-dire ici en 8, et de ces points on mène des parallèles à *ia'*. Si enfin on relie les points *i*, α, β, γ, *r*, δ, etc., dans lesquels ils coupent les lignes *oi*, *op*, *oc'*, *oq* et *oa'* à laide de la ligne courbe *irstuvwxo*: celle-ci sera la projection verticale cherchée de la spirale tracée à la surface du cône. Cette ligne est du nombre de celles à double courbure (§ 110).

Pour trouver maintenant la projection horizontale de cette ligne (*fig* B), on commence par tracer du point central *o'* sur le plan horizontal, les projections de toutes les circonférences passants par *r*, *s*, *t*, *u*, *v*, *w* et *x* (*fig.* A), et ensuite les projections des autres circonférences tracées entre *i* et *s*, *s* et *u*, etc. (*fig.* A); après quoi on commence sur le plan horizontal (*fig.* B) par *a*, et l'on trace peu à peu jusqu'au point *o'*, une courbe passant par les points d'intersection *a*. α', β', γ', *r'*, δ'. etc., dans lesquels chaque circonférence qui passe par là, coupe les lignes *o'b*, *o'c*, *o'd*, *o'e*, *p'f*. *o'q*, *o'h* et *o'a*. La ligne courbe en forme de spirale qui en résultera sera donc la projection horizontale demandée.

De même la ligne o'*a* (*fig.* B), est la projection de la ligne *oi* (*fig.* A), de même encore la ligne o'*b* (*fig.* B) est la projection de la ligne *op* (*fig.* A), etc. Par suite, les points *a*, α', β', γ', *r*, etc., de la *fig.* B, dans lesquels les lignes *o'a*, *o'b*, *oc*, etc., coupent dans le plan horizontal les cercles concentriques et correspondants, sont les projections des points correspondants dans lesquels les cercles qui sont figurés sous forme de lignes droite sur le plan vertical, sont coupés par les lignes *oi*, *op*, *oc*, etc., c'est à dire que *a*, α', β', γ', *r'*, δ', φ'. ψ', *t'* *u'*, *v'*, *w'*, *x'* et o' (*fig.* B), sont les projections des points *i*, α, β, γ, *r*, δ, φ, ψ, *s*, *t*, *u*, *v*, *w*, *x* et *o* (*fig.* A); et par suite la ligne spirale sur le plan horizontal est la projection de la ligne spirale du plan vertical.

Attendu que le tracé de tous les cercles de la *fig.* B rend ce travail difficile, et que leur grand nombre peut causer des erreurs; on pourra le faciliter si l'on ne décrit que

les cercles passants par *s'*, *u'* et *w* (*fg.* B), si l'on partage les parties des demi-diamètres *o'a*, *o'b*, *o'c*, etc., qui se trouvent entre deux cercles concentriques, en 8 portions égales, et qu'ensuite on mène les lignes de telle manière que α' passe par le premier point de partage, β' par le deuxième, γ' par le troisième, *r'* par le quatrième, *d'* par le cinquième, ζ' par le sixième, ψ' par le septième et *s'* par le huitième. On continuera ce tracé successif de la spirale à travers les autres cercles concentriques, jusqu'à ce que l'on atteigne le point *o'*.

Il est facile de voir l'exactitude de ce procédé par la simple inspection de la figure.

§ 123. — *Proposition.* — Décrire une spirale sur le développement *a' oa" c' a'*, *fig.* 38 A du cône *o i a'*.

Solution. — De même que dans la *fig.* 32, le rectangle *a b c d* est le développement de la surface courbe du cylindre, de même dans la *fig.* 38 A, la coupe *a' oa" c' a'* est le développement du cône. Pour dessiner ce développement avec la spirale telle que celle-ci apparait sur cette surface conique développée, on procède ainsi qu'il suit : On mesure d'abord la longueur de la circonférence de base du cône $= 2 + a'c' + \pi$, et on obtient par là en même temps la longueur de l'arc $a'a''$. De même on mesure par le demi-diamètre donné $a'c'$ et par la hauteur oc' du cône la ligne $oa' = \sqrt{(a'c')^2 + (oc')^2}$; après quoi on cherchera la grandeur de l'angle $a''oa'$, dans lequel on pose : La circonférence entière du cercle décrit avec oa' comme rayon est à la longueur de l'arc $a'a''$, comme la somme de tous les angles placés autour de *o* est à l'angle cherché, c'est à dire $(2 + oa' + \pi) : (2 + a'c' + \pi) = 360° : a'oa''$. On porte cet angle sur oa' et l'on décrit avec oa' comme rayon l'arc de cercle $a'a''$. Le secteur $a'oa''a'$ obtenu ainsi, est donc le développement entier du cône, et $a'o'e'a'$ la moitié de celui-ci. On obtient d'une manière plus prompte cette coupe, quoique d'une manière moins exacte, mais cependant suffisante pour les besoins ordinaires, si l'on décrit d'abord avec oa' pris comme demi-diamètre un arc d'une longueur indéterminée, si l'on divise la ligne ia' en sept parties égales, desquelles on en porte vingt-deux sur la longueur de l'arc, et si on joint a'', le dernier de ces points avec *o* (§ 17).

Si maintenant on divise l'arc $a' a''$ en huit parties égales, et si on mène les demi-diamètres ob' oc' od', etc., alors ces lignes qui apparaissent en leur véritable grandeur seront dans ce plan les lignes correspondantes des côtés op, oc, oq, etc.

Après quoi on tire du centre o des arcs concentriques à a' a'', passants par les points r, s'' t, etc.. et aussi par les points intermédiaires à ceux-ci, suivant lesquels la ligne $o\,a'$ est coupée par les lignes menées dès le commencement, parallèlement à $i\,a'$, ensuite tracer successivement en commençant par les points a', s'', u'' et w'' de la ligne oa', et en passant par les points d'intersection de ces arcs avec les demi-diamètres $o\,b'$, oc', etc., tels qu'ils se suivent, les lignes courbes a' α'' β'' γ'' r'' δ'' φ'' ψ'', s'' t'' u'', u'' v'' w'' et w'' x'' o; et ces lignes seront les différentes parties de la spirale cherchée sur le développement du cône. Les lignes d'intersection passant par r, s, t, u, v, w et x (*fig.* A) et situées parallèlement à $a'\,i$ sont dans le développement figurées sous forme d'arcs concentriques, parce que chacune peut être considérée comme la base d'une partie de cône développé. Par exemple, $os''\,s''$ est le développement du cône oss'', et $s''\,s''$ le développement de la circonférence qui passe par ss''.

Si le développement est ramené à la forme primitive du cône a' oa'' a', de telle manière que les lignes oa' et oa'' se joignent; alors les portions séparées de la spirale se continueront à la surface du cône sous forme d'une courbe non interrompue, en même temps que les points de terminaison s'' et s'', u'' et u'', w'' et w'' situés sur les lignes $o\,a$ et $o\,a''$ viendront coïncider. Par l'examen attentif de la figure, il est du reste évident que les points a', α'', β'', γ'', r'', δ'', φ'', ψ'', s'', t'', u'' du développement du cône répondent aux points i, α, β, γ, r, δ, φ, ψ, s, t, u, etc., de la projection.

§ 124. — *Problème.* — Tracer sur la surface courbe d'un cylindre droit $a\,b\,c\,d$ (*fig.* 39) des figures quelconques, dont les formes réelles et les dimensions sont données.

Solution. — On commence par tracer un rectangle ABCD, dont la base AD soit égale à la demie circonférence du plan horizontal (§ 49), et dont la hauteur AB soit égale à celle du cylindre; et ce rectangle sera alors la moitié du développement

du cylindre. On dessinera, par exemple, dans ce rectangle les figures demandées, telles que le losange EFGH, le rectangle IKLM et le cercle NOPQ; puis on cherchera leur projection l'une après l'autre sur la surface courbe du cylindre. A cet effet, on divisera AD en un nombre quelconque de portions égales, en 8 par exemple ; sur les points de partage 1, 2, 3, H, etc., *d*, on élève des perpendiculaires sur AD, on mène ensuite les horizontales RS, EG et TU, toutefois jamais à une distance arbitraire l'un de l'autre, mais de telle manière que le nombre de ces lignes, de même que leur position l'une par rapport à l'autre, soit établi suivant la forme de la figure à représenter. Ensuite on projette sur la surface courbe *abcd* ce qui se trouve dans le rectangle ABCD développé. Pour cela, on partage aussi la moitié du cercle de base *ah'd* en huit parties égales, on élève sur ces points de partage des perpendiculaires, et sur le côté *ab* on fait *ar* = AR, *ae* = AE et *at* = AT. Si d'un autre côté on mène aussi les horizontales *rs*, *eg* et *tu*, on obtiendra par là sur la surface courbe du cylindre *abcd* la projection des lignes tracées sur le développement du cilyndre ABCD. La *fig.* 39 indique clairement comment on transportera sur *abcd* les figures dessinées sur ABCD. En effet, puisque les distances verticales des figures dessinées en ABCD ne sont pas changées sur la surface du cylindre *abcd*, mais qu'au contraire ces distances doivent rester ici les mêmes; il s'ensuit que l'on a qu'à prendre une ouverture de compas et porter chaque point du développement ABCD sur la surface cylindrique *abcd*, à partir de la ligne de base AD. Ainsi, par exemple, le point *i* sera la projection du point I, parce que *i* 2 = I 2. D'autre part, le point *f* sera la projection de F, *n* celle de N, *k* celle de K, parce que *fh* = FH, *nh* = NH, *k*5 = K5, etc. Mais pour trouver sur *abcd* la position des points qui se trouvent sur aucune des lignes de développement, tels par exemple que les points V et Y, on abaissera de ces points sur AD les perpendiculaires VW et YZ, on déterminera sur la demi-circonference *ah'd* en *w'* et *z'*, les points *w* et *z* (comme ceci a eu lieu *fig.* 32 avec le point S' entre 3 et 4), de *w* et *z* on élèvera vers *ad* des perpendiculaires, et sur elles on fera *vw* = VW et *yz* = YZ. Par

ce procédé l'on peut transporter sur la face courbe *abcd* tout point que l'on choisit sur le plan ABCD, et c'est ainsi que les points O et Q de ce plan ont été transportés dans les points *o* et *q* de la surface courbe.

Les lignes droites EF, FG, GH, HE, AC et BD, apparaissent à la surface du cylindre sous forme de parties d'hélices semblables *ef, fg, gh, he, ac* et *bd*, mais le cercle NOPQ apparait sous forme d'une ligne courbe *nopq* de forme d'un rond allongé, mais n'est pas une ellipse.

§ 125. — Si la figure que l'on doit dessiner à la surface d'un cylindre est composée de la réunion de plusieurs courbes, peu importe que sa forme soit régulière ou irrégulière, on l'exécutera en suivant les indications du paragraphe précédent; seulement on aura peut-être besoin d'un nombre plus ou moins grand de lignes, d'après le plus ou moins de complication de la forme de cette figure, aussi afin d'obtenir par là un grand nombre de points d'intersection pour la détermination exacte de la figure à représenter.

S'il s'agissait par exemple de dessiner un bas-relief situé sur la surface courbe d'un cylindre, il faudrait dans ce cas dessiner dans sa véritable proportion sur le développement du cylindre, la portion apparente dans le demi cylindre, et à l'aide du procédé indiqué dans le paragraphe précédent, transporter de ce développement sur la surface courbe le contour de chaque figure en particulier. La projection ainsi obtenue à la surface courbe d'un cylindre sera d'autant plus parfaite que l'on aura pris un plus grand nombre de lignes horizontales et perpendiculaires pour le développement.

Il est à peine besoin de dire que la construction indiquée au paragraphe 124 peut aussi bien être employée pour des surfaces convexes que pour des surfaces concaves, puisque *abcd* peut aussi bien être un cylindre convexe que concave.

§ 126. — Si, d'autre part, une figure est dessinée sur la surface courbe d'un cylindre *abcd* (*fig.* 39) (figure qui naturellement ne peut pas être représentée dans sa position véritable sur cette surface courbe), et s'agit-il d'obtenir sa forme réelle, afin d'arriver, à l'aide de ce dessin, à la connaissance des rapports exacts des lignes entre elles, on suivra alors de nouveau

la voie tracée dans le § 124, seulement dans un sens inverse; c'est-à-dire, on dessine d'abord le réseau de lignes sur le cylindre, comme cela a lieu dans *abcd* (*fig.* 39), puis on le transporte sur le développement ABCD de la surface cylindrique. Les distances verticales, qui jamais ne présentent de raccoursissement, sont portées les premières de *abcd* sur ABCD sur les verticales correspondantes. Les distances horizontales se déterminent, comme on peut le voir par la fig. 39, par le développement lui-même. Le reste est facile à saisir par l'inspection de la fig. 39.

§ 127. — *Problème.* — Dessiner le développement d'un cylindre coupé obliquement *a b c d* (*fig.* 40), dans lequel les lignes *a b* et *cd* sont les projections des plans sécants obliques au plan de projection horizontale et perpendiculaires au plan de projection verticale.

Solution. — On trace la base du cylindre sous la forme d'un cercle, et on divise aussi bien sa circonférence que la ligne *c' f* (qui est sa rectification en prolongement de *d' c*) dont la longueur peut être trouvée d'après la méthode indiquée pour la rectification du cercle (§ 47, 48), en un même nombre de portions égales, en 12, par exemple. On élève des perpendiculaires de tous ces points de partage, tant du cercle que de la ligne *c' f*, et on mène à *d f* des parallèles par les divers points où les perpendiculaires menées à la surface du cylindre coupent les lignes *ab* et *cd*, et enfin on relie les points Ī, g', k', p', n', a', n'', etc., par les lignes courbes *b a' e* et *cd g*. Ce sont les points où les perpendiculaires correspondantes à *c'f*, dans le développement, sont coupées par les parallèles *a d f*, dont il a été question. L'on aura alors *ba' egd' cb*, qui sera le développement cherché de ce cylindre coupé obliquement.

On se convaincra de la justesse de ce procédé par un examen attentif de la figure 40. Il y a encore à observer que les courbes *ba' e* et *cd g* ne sont pas le développement de lignes à doubles courbures, parce qu'elles sont la section du cylindre par un plan mené par *ab* et *cd*, et elles forment des *ellipses*, si l'on ramène le développement à la forme cylindrique primitive.

§ 128. — *Problème.* — Un cylindre est placé parallèlement

au plan de projection horizontale et apparaît sur celui-ci sous la forme du rectangle *abcd* (*fig.* 41), tandis qu'il est incliné sous un angle α au plan de projection verticale; faire connaître la projection de ce cylindre sur ce dernier plan.

Solution. — On construira, suivant les données du § 104, les deux ellipses AO'BO'' et DP'CP'' comme étant les deux bases du cylindre, dans lesquelles O'O'' = *ab*, et AB est la projection de *ab*; l'on réunira les points O' et P', ainsi que O'' et P'' par des droites, qui doivent être parallèles à *xy*; AC sera alors la projection cherchée qui naturellement sera d'autant plus courte que l'angle α sera plus grand, et apparaîtra sous forme de cercle lorsque $\alpha = 90°$.

Le cylindre est-il creux comme dans *efgh*, on obtiendra encore sur le plan de projection verticale l'ellipse EF, facile à trouver.

§ 129. — *Problème.* — Dessiner sur le plan de projection verticale la projection d'un cône droit tronqué (*fig.* 42), lorsqu'il apparaît sur le plan de projection horizontale sous la forme d'un trapèze *abcd*, et lorsque son axe, étant parallèle à ce plan, est incliné sur ce plan par rapport à la ligne de terre sous l'angle α.

Solution. — On mène la ligne AQ parallèle à la ligne de terre; on construit, d'après le § 104, les deux ellipses AO'BO'' et DP'CP'' comme étant les projections des bases *ab* et *cd*, et on applique les tangentes aux deux ellipses. Si *q* est le sommet du cône dans le plan de projection horizontale, Q donnera le sommet d'un même cône sur le plan de projection verticale.

§ 130. — *Problème.* — Soit un cylindre ABCD (*fig.* 43 I), formant l'angle α avec le plan de projection horizontale, et étant situé dans une position parallèle au plan de projection verticale; sa projection sur le premier plan apparaîtra alors, d'après le § 128, sous la forme de la figure II. Si l'on donne ensuite à cette figure, avec tous ses points, la position de la figure III, de telle sorte que l'axe fasse avec *xy* l'angle β, que la figure III soit d'ailleurs égale à la figure II; on demande de faire connaître la projection *du cylindre doublement incliné* vers le plan de projection verticale, ainsi que celui-ci a été représenté dans la figure IV.

Solution. — On construit, d'après les § 107 ou 108 par la figure I et figure III, l'ellipse A'OBO' (*fig.* IV), ce qui s'exécutera promptement à l'aide des points correspondants notés de la même manière. On procède de même pour la projection de l'autre plan CD', et l'on trace les tangentes aux deux ellipses, et A'C' sera alors la projection cherchée. Dans cette construction, il faut faire attention à ce que, dans la projection perpendiculaire d'un cylindre, celui-ci doit toujours apparaître sous son vrai diamètre, quelle que soit sa position par rapport au plan. D'après cela, il faut que la distance de *mn* (*fig.* IV) soit égale au diamètre AB de la figure I, quoique la longueur A'D' (*fig.* IV), à cause de sa position inclinée vers le plan, soit plus courte que la longueur réelle AD (*fig.* I) du cylindre. De même *oo'* (*fig.* II), *oo'* (*fig.* III) = AB (*fig.* I). De ce que le diamètre du cylindre doit apparaître dans toutes les positions de ce cylindre dans une dimension constante, c'est ce qui résulte de la construction marquée dans la figure 30, dans laquelle non-seulement les lignes *cc* et *c'c'* ont été rendues égales à AB, mais où encore la ligne FG a obtenu la longueur du diamètre donné, et sera par conséquent aussi égale à AB.

Il est encore aisé de comprendre par la vue de la figure comment le parallélépipède P a été transporté de la figure I dans la figure IV.

§ 131. — *Problème.* — Un *cône tronqué* droit ABFE (*fig.* 44, I) a la position suivante sur un plan : le côté BF s'applique sur la ligne de terre *xy* (ou encore est parallèle avec celle-ci), l'axe DG forme par suite avec *xy* un angle, mais est parallèle au plan de projection verticale ; on doit premièrement dessiner la projection de ce cône dans la projection horizontale (*fig.* II), puis dans une position oblique au plan de projection verticale (*fig.* IV), puis enfin dans une position perpendiculaire au plan de projection verticale (*fig.* V).

Solution. — Les deux bases circulaires du cône apparaissent sur le plan vertical sous forme des lignes droites AB et EF, mais dans la projection horizontale, sous la forme des ellipses *ab* et *ef*, que l'on obtient d'après les indications du § 104, et auxquelles on trace encore deux tangentes, pour obtenir dans la figure II la projection cherchée *bc* du cône.

Par la position inclinée III de la figure II, et par la figure I,

on trouvera la projection du cône (*fig.* IV) sur le plan de projection verticale, où les ellipses A'B et E'F apparaissent comme étant les projections de cercles à double inclinaison, dont la figure s'obtient à l'aide des lettres correspondantes des § 107 à 108.

Dans la vue V, le cône se montre sous la forme de deux ellipses dont les grands axes D'D' = AB, G'G' = EF, et dont les petits axes A'B' = AH et E'B' = EI. On peut maintenant construire ces ellipses suivant ce qui est dit au § 104, ou se servir des points arbitraires 1 et 2 admis dans la figure I pour la détermination de la figure IV, et augmenter leur nombre selon le besoin.

§ 132. — Si le cône était entier au lieu d'être tronqué, alors il apparaîtra dans la fig. I sous la forme du triangle ABC; dans la fig II et la fig. III, les côtés seront prolongés jusqu'au sommet C, de telle manière que C fig. II soit la projection de C fig. I; on trouvera C dans la fig. IV, à l'aide de perpendiculaires abaissées de C fig. III sur XY et par le prolongement des côtés jusque vers C; enfin dans la fig. V, la petite ellipse G' G' disparaîtra, de telle sorte que, dans cette figure, le cône n'apparaîtra plus que sous la forme de l'ellipse D' D'.

§ 133. — Si dans la figure 44, I, l'axe DC n'est pas perpendiculaire à la base AB, ABC sera alors un cône oblique; et, dans ce cas aussi, la construction employée pour la représentation des figures II, IV et V restera tout à fait la même, que ce cône soit entier ou tronqué.

§ 134. — *Problème.* — Soit ABCD (*fig.* 45, II) la vue latérale d'un *cylindre creusé concentriquement*, et figure I la moitié de sa base; on doit faire connaître la projection de ce cylindre sur le plan de projection verticale, comme on le voit dans la figure V, les angles α et β étant donnés.

Solution. — La figure III s'obtiendra à l'aide de la figure II, en suivant les indications du § 130; et si l'on donne à la fig. III par rapport à xy, l'inclinaison de l'angle β, ainsi que cela existe pour la figure IV, l'on obtiendra la projection cherchée (*fig.* V), à l'aide des figures IV et II, en suivant les indications du § 107 ou 108. Les points correspondants ont été marqués de la même manière, pour qu'on puisse, à leur aide et celui des lignes ponctuées, facilement retrouver la cons-

truction : ainsi, par exemple, A'D' sera la projection de AD, et E'H' celle de EH, etc., de même, il faut considérer le point I dans la figure II comme étant dans les figures V et III la projection des lignes I'I' et *ii*, et IK comme étant la projection de toutes les lignes désignées I'K' et *ik* dans les figures V et III. (Il faut se reporter à la remarque faite à la fin du § 130 pour ce qui est relatif à la longueur du diamètre du cylindre.)

§ 135. — Si ce cylindre est formé, comme la circonférence d'une roue, par l'assemblage de plusieurs parties ou jantes AO, NI, IL, MD (*fig.* I), et si l'on doit les représenter dans la figure II, III et IV, dans leur projection, dans ce cas, le joint AE (*fig.* I) apparaîtra dans la figure II sous la forme de AEFB; dans les figures III et IV, sous la forme de la droite $\bar{b}e$, et dans la figure V, sous celle de A'E'F'B'. La coupe II de la figure I sera projetée dans la figure II sous forme de la droite IK, dans les figures III et IV, sous celle de *iikk*, et dans la figure V, sous celle de I'I' K'K', projections qui sont aussi faciles à trouver que celles des autres coupes, et qui sont rendues très apparentes dans cette figure.

§ 136. —Les formes réelles de ces coupes sont des rectangles qui tous sont semblables au rectangle AEFB de la figure II. Mais si on se représente une coupe, par exemple, MK, menée dans une direction à volonté, à travers le cylindre en question ABCD (*fig.* 45 II), et si l'on doit indiquer la forme réelle de cette coupe, on prolongera alors MK assez loin, pour qu'elle coupe en Q, S, R, et P les prolongements de AB, EF, GH et CD, on décrira ensuite sur PQ et RS des ellipses, dont les grands axes seront ces lignes elles-mêmes, et dont les petits axes seront AD et EH, et enfin des points M et K on élèvera sur PQ des perpendiculaires que l'on prolongera jusqu'à ce qu'elles coupent ces ellipses; M'K' sera alors la forme réelle de la coupe menée par MK.

La justesse de cette manière de procéder devient évidente, lorsqu'on se représente le cylindre en question ABCD prolongé des deux côtés jusqu'en P et Q, et lorsqu'on se représente une coupe menée par PQ. Il en résultera la formation d'un plan de section circonscrit par deux ellipses, dans lesquelles la partie M'K' répondra à la ligne MK et au cylindre ABCD.

§ 137. *Problème.* — Un cylindre ABCD (*fig.* 46), oblique-

ment coupé, a, par rapport au plan de projection verticale, une position telle que la section apparaît sur ce plan sous la forme de la ligne droite AD ; on doit dessiner sur le plan horizontal la projection du plan sécant.

Solution. — Comme chaque plan qui coupe un cylindre dans une direction oblique à sa base forme une *ellipse*, et comme la projection d'une ellipse est de nouveau une ellipse, il s'ensuit que la projection cherchée *aedea* sera aussi une ellipse, dont le grand axe *ad* devra être la projection de AD, et dont le petit axe *ee* = *ff* = BC, et par suite l'ellipse sera facile à tracer d'après les indications du § 104. De même, on pourra promptement faire connaître la forme réelle du plan sécant projeté verticalement en AD, puisque celui-ci sera une ellipse AG DHA, dont le grand axe AD et le petit axe GH=BC sont donnés.

Mais pour donner la solution d'une manière générale et applicable à d'autres cas, il est encore nécessaire de montrer comment on peut trouver chaque point isolé de la courbe à chercher. Dans ce but, on dessine la section droite BC du cylindre, représenté ici par le cercle A'G'B'H', dont le centre O se trouve sur le prolongement de EF ; on choisit sur AD un point quelconque, soit K, et l'on détermine sa projection sur le plan de projection horizontale, comme suit : on mène de K une ligne KK' parallèle à xy, de K on abaisse une perpendiculaire sur xy, sur laquelle on fait $nk = nk = NK' = NK'$; k et k seront ainsi deux points de la courbe que l'on cherche ; car la ligne $k'k'$ donne la longueur de la corde qui est aussi représentée dans AD par le point k ; et comme $kk = K'K'$, alors k et k seront les points dans lesquels la surface cylindrique est coupée en AD par le plan. Si l'on fait aussi $KL = KM = Nk' = Nk'$, L et M seront, par le même motif, deux points sur le contour du plan sécant qui seront dans leur forme véritable. Par le même procédé, on trouvera les points i et i, ainsi que P et Q et la projection de tous autres points que l'on pourrait encore admettre sur AD. Il y a encore à remarquer que le cercle A'G' B'H'A' représente en même temps la projection de l'ellipse passant par AD sur un plan perpendiculaire à l'axe du cylindre.

§ 138. — Si dans la figure 46, la coupe DR a lieu sous un angle de 45 degrés avec DC, alors le plan d'intersection passant par DR formera bien encore en effet une ellipse; cepen-

dant sa projection horizontale devra se montrer sous forme de cercle, parce qu'alors la projection de DR, on la ligne *dr*, doit être égale au diamètre du cylindre. et par suite les deux axes de l'ellipse seront égaux.

Si l'angle RDC devient plus grand que 45°, la projection du plan sécant apparaîtra de nouveau sur le plan horizontal comme une ellipse, mais dont le *grand axe* sera le diamètre du cylindre.

§ 139. — Lorsque le plan qui coupe un cône n'est pas parelle à sa base, mais passe cependant par tous les points de la surface conique, dans ce cas, le contour de ce plan, aussi bien que sa projection quelconque, formera une *ellipse*, facile à déterminer par ce qui a été dit jusqu'à présent relativement aux ellipses, et surtout parce que, dans ce cas, les deux axes peuvent facilement être indiqués.

§ 140. — *Problème.* — *Un cône* droit *abc* (*fig.* 47) est parallèle avec l'axe *bd*, et il est coupé de telle sorte que le plan sécant est perpendiculaire à la base du cône. Trouver la projection de ce plan sur le plan vertical.

Solution. — On trace au dessous de la ligne de terre *xy* le plan horizontal du cône, qui apparaît sous forme d'un cercle *a'd'c'd'*, dont le diamètre *a'c'* = *ac*, et dont le centre *b'* (qui se trouve sur le prolongement de l'axe *bd*) est la projection du sommet *b*, et l'on mène à une distance quelconque de *b'* la ligne *i'r'* parallèlement à *a'c'*, laquelle ligne doit être sur le plan horizontal la projection du plan sécant, et qui devra apparaître ici sous forme de ligne droite, à cause de sa position perpendiculaire. Du point *b'*, on décrit, avec l'écartement *b'k'* = *b'e'* et avec les demi-diamètres pris à volonté, *b'l'*, *b'm'* et *b'n*, des cercles concentriques, dans les points *k'*, *l'*, *m'*, et *n'*, on élève des perpendiculaires sur la ligne *a'c* et l'on mène des points dans lesquels la ligne *ab* du plan vertical est coupée par ces perpendiculaires d'autres lignes parallèles à *ac*. Ceci fait, on élève des points d'intersection *i'*, *h'*, *g'*, *f'*, *e'*, *o'* des... perpendiculaires que l'on prolonge jusqu'à ce qu'elles soient coupées en *i*, *h*, *g*, *f*, *e*, *o*... par les horizontales menées par *n*, *m*, *l*, *k*, ou bien on prend avec le compas l'une après l'autre les distances des points d'intersection des cercles concentriques de *e'* à la ligne *i'*, *r'*, et on les porte sur les lignes droites cor-

respondantes du plan vertical, c'est-à-dire on fait $sf = so = e'f'$, $tg = tp = e'g$, $uh = uq = e'h'$ et $di = dr = e'i$, et on mène par les points $i, h, g, f, e, o, p, q, r$, une courbe ; celle-ci sera la projection verticale de la ligne d'intersection cherchée du cône avec le plan dans le cas donné. Car, puisque les lignes qui sont menées par k, l, m et n parallèlement à ac sont les projections des cercles qui en dépendent, courbes qui doivent apparaître dans le plan vertical sous forme de lignes droites, on n'a alors besoin que de déterminer sur les lignes correspondantes du plan vertical les points $i', h', g', f', e', o', p', q'$, et r', dans lesquels la ligne $i'r'$ est coupée par ces cercles, pour pouvoir donner la forme exacte de la ligne d'intersection. Mais i' est la projection de i, h' celle de h, g' celle de g, f' celle de f, e' celle de e, o' celle de o, etc., et par suite la ligne ier, menée par ces points, sera la projection cherchée de la ligne sécante, sur laquelle e est le point culminant.

§ 141. — On donne le nom d'hyperbole à la courbe qui résulte de l'intersection d'un cône droit avec un plan perpendiculaire à sa base. Cette ligne deviendra toujours plus grande ou plus haute, plus la coupe faite se trouvera près du diamètre $a'c'$, et plus petite plus elle s'en éloignera : si par exemple, $v'w'$ était la projection du plan d'intersection, vdw serait, dans ce cas, l'hyperbole qui en résulterait, et que l'on peut trouver ainsi qu'on a trouvé ier. On comprendra, du reste, sans plus d'explication, que l'on pourra trouver avec d'autant plus d'exactitude cette ligne que l'on aura employé un plus grand nombre de cercles auxiliaires.

§ 142. — Si le plan d'intersection était perpendiculaire à la base du cône, mais si, au lieu d'être parallèle à la surface du plan, il avait une certaine inclinaison vers elle, telle, que sa projection horizontale forme comme $i'r'$ avec xy un angle aigu, alors on trouvera la projection de la ligne d'intersection, d'après les indications du § 140. Dans le cas présent, où $b'e' = b'e'$, on doit la considérer, en quelque sorte, comme étant la projection de l'hyperbole ier, si celle-ci vient à prendre la position de $i'r'$. Mais comme la projection d'une hyperbole se trouve être de nouveau une *hyperbole*, la ligne trouvée sera donc aussi une hyperbole.

Si la coupe passe par b', la projection sera composée de deux

lignes droites, et elle sera figurée sur le plan vertical par une ligne droite, si le plan d'intersection est perpendiculaire à la surface du plan vertical, c'est-à-dire si $i'r'$ forme avec xy un angle droit.

§ 143. — *Problème.* — On a dirigé par *un cône droit*, dont la projection verticale est représentée dans la figure 48 par la figure I, et la projection horizontale par la figure II, une coupe DE parallèlement au côté AB, de telle manière que le plan d'intersection est perpendiculaire au plan vertical ; on doit tracer la projection verticale et horizontale de la ligne d'intersection.

Solution. — On trace dans la figure III le triangle A'FG égal au triangle ABC, après quoi on mène du point D une parallèle à xy, qui coupera en D l'axe A'C', et de même du point D une perpendiculaire sur xy qui coupera en d le diamètre bc. On abaissera encore une perpendiculaire sur xy du point E, qui coupera la circonférence de la projection horizontale en e et c : l'on fera alors $c'E = c'E' = ei$, et ainsi on aura déjà trouvé trois points E'D' et E' dans la figure III, et e, d, e, dans la fig. II, qui appartiennent à la courbe cherchée. Pour déterminer ensuite la position des points intermédiaires, on choisira un point à volonté H sur DE, et l'on mènera par celui-ci une ligne KL parallèle à BC, ligne que l'on prolongera vers la fig. III ; sur elle on tracera un demi-cercle KNL. D'autre part, on abaissera de KL la perpendiculaire HN, et l'on fera HN' = H'N' = HN ; de cette manière, on aura dans N' et N' deux nouveaux points de la courbe sur le plan vertical. Si, enfin, dans la figure II on décrit du point a avec la distance ak un cercle, de telle manière que kl = KL, et si l'on prolonge la perpendiculaire HN jusqu'à ce qu'elle coupe en n et n ce cercle, l'on aura aussi deux points de la courbe sur le plan horizontal. Par suite, les courbes E'N'D'N'E' et $endne$ seront les projections demandées sur le plan vertical et horizontal, projections qui seront trouvées avec d'autant plus d'exactitude que l'on admettra pour leur détermination un plus grand nombre de points sur DE.

La justesse de ce procédé est évidente si, par la pensée, on relève le demi-cercle KNL de la figure I jusqu'à ce qu'il vienne poser perpendiculairement sur ABC : alors HN sera la moitié

d'une corde dont les extrémités se trouvent sur la courbe d'intersection du plan avec le cône.

§ 144. — Pour trouver la forme réelle de la courbe d'intersection DE, on mènera sur DE (*fig.* I) en D, H et E des perpendiculaires; ensuite on mènera D'I parallèlement à DE; on fera IE" = I'E" = *ci*, de même H'N" = H'N" = *hn*, et on mènera la courbe E"N'D'N'E" ainsi que la droite E'E'. Ici aussi on trouvera avec d'autant plus d'exactitude les courbes, qu'on adoptera un plus grand nombre de points en DE, dont la position sera déterminée comme nous l'avons indiqué pour le point H du paragraphe précédent.

Cette courbe ainsi trouvée se nomme une *parabole*, et comme la projection d'une parabole est de nouveau une parabole, il s'ensuit que les courbes E D E' et *ede*, qui sont les projections de E" D" E", seront des *paraboles*.

§ 145. — *Problème.* — La droite *ef* représente sur le plan de projection horizontale, la projection de l'intersection d'une sphère ABCD (*fig.* 49) par un plan; indiquer la projection de la ligne d'intersection sur le plan vertical.

Solution. — Le contour de toute intersection faite dans une sphère par un plan forme toujours un cercle, peu importe le point de la sphère dans lequel a lieu l'intersection ou quelle est la direction suivant laquelle celle-ci a été faite (avec cette différence que ce cercle deviendra toujours plus grand, plus l'intersection se rapprochera du centre de la sphère et qu'elle aura atteint son maximum de grandeur lorsqu'elle passera par ce centre lui-même); c'est pour cette raison aussi que la ligne de contour du plan passant par *ef* est un cercle; et par suite il suffira de connaître la position de la ligne *ef* par rapport à la surface du plan vertical, pour savoir si ce cercle se projettera sur le plan sous forme de ligne droite du cercle ou d'une ellipse (§ 103). Pour que ce dernier cas ait lieu, il faut que *ef* forme avec *xy* un angle aigu, et on pourra alors tracer sur ABCD l'ellipse (suivant le § 104), puisque, comme c'est facile à voir, le grand axe de celle-ci GG = *ef* et que le petit axe EF doit être la projection de *ef*.

Si l'on ne voulait pas se servir de la méthode de solution du § 104, mais, au contraire, rechercher chaque point pour la

formation de l'ellipse, voici alors comment on procéderait : on choisit sur *ef* un point à volonté *p*, on décrit avec *ap* un cercle, on élève dans les points *q* et *r*, dans lesquels il coupe le diamètre *bd*, des perpendiculaires sur *ab*, et on mène par les points Q, Q, R et R, où la circonférence du cercle les rencontre, les lignes QR et QR parallèlement à BD ou *xy*; ces droites seront les projections sur le plan vertical du cercle *qpr* passant par *qr*. Si maintenant on projette en QR et QR, les points *p* et *s* où la ligne *ef* coupe ce cercle, les points obtenus par là P, P, S et S seront de nouveau quatre points sur le contour de l'ellipse cherchée; car ils sont dans le plan vertical les projections des points où *ef*, qui est la projection horizontale de la courbe d'intersection, rencontre sur le plan horizontal le cercle passant par *qr*.

Pour indiquer sur le plan vertical les points T et T où la circonférence du cercle rencontre l'ellipse, on élève sur le plan horizontal sur la ligne *bd* une perpendiculaire au point *t*, dans lequel le diamètre *bd* (comme étant la projection du cercle ABCD), est coupé par la ligne *ef* (comme était la projection de l'ellipse GFGE).

§ 146. — *Problème.* — *Une moitié de sphère creusée* ABC (*fig.* 50. I.) a, par rapport aux deux plans de projection, la position représentée en *fig.* I; tracer la projection horizontale *fig.* II.

Solution. — On construit d'après le § 104 les deux ellipses *ca* et *de fig.* II comme étant les projections des cercles AC et DE (*fig.* I), et avec OF on décrit du point *o*, comme centre, le demi-cercle *ofo*, et l'on obtiendra ainsi la projection demandée.

En effet, qu'on se figure par OF (*fig.* I) un plan posé parallèlement au plan de projection horizontale, alors ce plan formera en réalité un demi-cercle et apparaîtra aussi comme tel dans la fig. II, puisque toutes les lignes de projection, ainsi qu'on peut le voir en F, toucheront à l'entour de ce demi-cercle la demie-sphère et représenteront sur le plan de projection horizontale le demi-cercle *ofo* tracé dans sa véritable grandeur.

§ 147. Si on donne à la figure 50. II la position de la figure III

par rapport à $x y$, c'est-à-dire si on se représente la demi-sphère comme tournée autour du point de contact P, pour obtenir dans la fig. IV la projection de la demi-sphère dans une position inclinée au plan vertical, on construira alors les deux ellipses A' O' C' O' et E' O' D' O' du cercle à double inclinaison, d'après le § 107 ; on mènera par le centre o de la fig. III la ligne $g h$ parallèle à $x y$; on déterminera dans la fig. IV, d'après le § 108, les grands axes G H et I K des deux ellipses en question, et on décrira du point O avec le demi-diamètre O G le demi-cercle G P H, lequel touchera en un point P' la ligne de terre $x y$.

Ici aussi on se convaincra de l'exactitude de ce procédé, si l'on se rappelle que gh a été mené parallèlement à la ligne de terre; qu'ensuite le plan vertical passant par gh, parcela même qu'il coupe la demi-sphère, forme un demi-cercle et est parallèle au plan de projection. C'est pourquoi aussi il faut que la projection de ce demi-cercle soit le demi-cercle de même grandeur G P H, dont le diamètre dans la figure IV est la ligne G H = A B.

Si l'on voulait réellement exécuter une coupe semblable par gh (*fig.* III), et enlever le quart de sphère situé au-dessous de gh, dans ce cas, la projection du quart de sphère restant situé au-dessus de gh dans la figure IV, apparaitrait sous la forme d'une figure terminée par les demi-ellipses H A O'G, K E'O I et HP'G, K Q'I.

148. — Si l'on se représente que, dans la figure 50, I, la moitié de sphère a été divisée en deux quarts de sphères par un plan passant par A B C, alors la ligne $c f$ sera, dans la fig. II et par suite aussi dans la fig. III, la projection de cette coupe. Si l'on se représente maintenant dans la fig. III le quart de sphère situé à droite comme enlevé, et si on veut représenter dans la fig. IV la projection de l'autre quart resté à gauche, dans ce cas, on conservera les deux moitiés d'ellipses A'O'G C' et E'O' I D', et, en outre, on tracera par les points A',P',C', et E',Q,'D' deux moitiés d'éllipses. Ceci sera facile à exécuter dans le cas où le diamètre A C de tout le cercle et la direction $c f$ (*fig.* III) de la projection sont connus sur le plan horizontal, où l'on peut, d'après les § 102 et 104, construire

les ellipses en entier ou en retrancher les portions désignées.

Si l'on se figure enfin le plan d'intersection, passant par OB (*fig.* 1), dans ce cas aussi on peut trouver la projection dans la fig. II et IV du quart de sphère AOB, d'après le procédé déjà plusieurs fois indiqué; de même que l'on pourra toujours trouver, avec un peu de réflexion, les projections, quelle que soit leur position par rapport au plan de projection.

§ 149. — *Problème.* — Si l'on se représente le plan *abcd efghika* (*fig.* 51, I) faisant autour de l'axe *ab* une révolution complète; ses limites *cdefghika*, composées de lignes droites et courbes, engendreront alors un corps terminé par des surfaces courbes et planes, en tant que chaque point de ces limites décrira un cercle. (Voyez la fin du § 100.)

Si maintenant ce corps a vers *xy* ou vers le plan de projection verticale la position figurée dans la fig. I, il s'agit de trouver sa projection sur ce même plan vertical dans la fig. II.

Solution. — Comme ce corps entier est composé de deux corps engendrés, d'une part, par les lignes *cd* et *ef*, et de l'autre, par la courbe *fghika*, et comme on a déjà fait connaître ce qu'il est nécessaire de savoir pour la projection de ces deux cylindres, il ne sera donc nécessaire ici que de faire voir quelle est la projection de ce dernier corps dans la fig. II.

A cette fin, on commence par choisir sur la courbe *af* plusieurs points à volonté, toutefois de telle manière que, par ce moyen, on parvienne à produire le plus exactement possible la forme du corps. Si *k* est un de ces points, on mènera alors *kl* perpendiculairement sur *ab*; dans le point d'intersection *o*, on élève sur *xy* une perpendiculaire qui coupe en O la ligne AC menée parallèlement à *xy* (*fig.* II), et on fait là O O' = OO' = *ok* : dans ce cas, O' et O' seront deux points de la circonférence de la projection qu'on cherche; car, puisque *ok*, dans son mouvement autour de *ab*, décrit un cercle, la ligne O'O' sera le grand axe de l'ellipse qui engendre le cercle *lk* (*fig.* II) incliné vers *xy*; et comme on peut se représenter cette ellipse comme étant le contour d'un plan d'intersection passant par *lk*, il faut que ses limites extrêmes O' et O' se trouvent situées dans le contour de la projection (*fig.* II), attendu qu'ici les lignes de longueur et de largeur peuvent seules apparaître en

raccourci, mais que celles en hauteur, au contraire, restent dans leur dimension réelle. Les mêmes choses ont lieu pour les autres points *i*,*h*,*g*... tant au point de vue de la construction que de la preuve.

§ 150. — *Problème.* — On a traversé le corps (*fig.* 51) par un plan perpendiculaire au plan de projection horizontale, où il apparaît par suite dans la fig. I sous la forme de la droite *m z*; on doit indiquer dans la fig. II le contour de ce plan sécant.

Solution. — Des points *m*, *n* et *p* on élève sur *x y* des perpendiculaires qui coupent les ellipses de la fig. en M et M', N et N', *q* et *q'*, P et P', et l'on relie les points M et N, M' et N', de même que *q* et P, *q'* et P' par des portions d'ellipses, et par des lignes droites les points M et M', N et *q*, ainsi que N' et *q'*, et l'on aura ainsi trouvé le contour de la portion du plan d'intersection passant par les deux cylindres. Mais afin que l'on ne soit pas obligé, pour tracer ces portions d'ellipse, de construire les ellipses en entier, on choisira entre *p* et *m* des points à volonté et on les déterminera dans la fig. II, de la manière suivante : soit *s* un de ces points; on mènera par *s* la ligne *rt* perpendiculairement sur *ab*, on construira dans la fig. II une ellipse résultant du cercle d'intersection *rt*, et on coupera le contour de cette ellipse en S et S' par une ligne que l'on élève perpendiculairement de *s* sur *xy*, et ainsi S et S' seront deux points appartenant aux portions M N et M' N'; car les points S et S' sont, dans la fig. II, les projections du point *s*, dans lequel le plan *m z* coupe la circonférence du cercle figuré dans la figure I par *r t*.

Par le même procédé on trouvera encore dans la fig. II la projection des points que l'on adopte dans la fig. I entre *p* et *z*. Seulement il y a encore à remarquer que les points U et U' de la fig. II sont les points où la courbe d'intersection rencontre la ligne de contour du corps, attendu que le point *u*, dont ils sont la projection, se trouve lui-même dans l'intersection des lignes *mz* et *ab*, et par suite, que la perpendiculaire élevée de *u* sur *x y* doit couper l'ellipse le long de son grand axe.

Enfin, il y a encore à ajouter que M N', N *q* et N' *q'* doivent, pour ce motif, apparaître comme lignes droites, parce que ces por-

tions du contour passent ici à travers des plans et que les projections de ces points dans la fig. 1 sont les points *m* et *n*.

§ 151. — Si l'on voulait trouver la forme réelle du contour de ce plan d'intersection, comme cela a eu lieu pour la fig. III, dans ce cas, on se servira du procédé indiqué pour la détermination des points M et M', N et N', *q* et *q'*, P et P'... ; mais on fera *m z* (*fig.* III)=*m z* (*fig.* 1) et on placerait les points *n*, *p*... dans la fig. III, exactement aussi loin de *m*, qu'ils sont distants de ce point dans la fig. 1. Ainsi, par exemple, pour trouver les points V et V', on mène par *v* (*fig.* 1) la ligne *ii'* perpendiculairement sur *ab*, on construit dans la fig. II l'ellipse qui est la projection du cercle *ii'*, et on élève en *v* une perpendiculaire sur *xy*, alors les points V et V', dans lesquels l'ellipse coupe ce cercle, sont les points cherchés, que l'on pourra dèslors facilement transporter sur la fig. III.

§ 152. — La courbe construite dans le paragraphe précédent appartient aux lignes à simple courbure, car elle se trouve sur un plan et apparait, dans sa projection, dans sa véritable grandeur, lorsque ce plan se projette parallèlement à lui-même. Elle apparait, au contraire, comme ligne droite lorsqu'elle est posée perpendiculairement sur son plan de projection, de même que, d'autre part, sa projection déviera un peu plus, un peu moins de la forme originale, lorsque le plan, dans lequel elle est tracée, est incliné par rapport au plan de projection.

Comme dans la pratique on est rarement appelé à exécuter de semblables constructions, il ne nous a pas paru nécessaire d'augmenter ici le nombre des problèmes. Ce que nous avons dit jusqu'ici suffira pour trouver, même pour les différentes positions des corps, les projections et les lignes de contour de leur plan d'intersection, si l'on suit la voie que nous avons indiquée.

CHAPITRE IV.

De l'intersection des corps terminés par des surfaces courbes.

§ 153. — Dans le dessin des machines, en architecture, etc., on rencontre souvent des corps à surfaces courbes et qui se coupent sous ses différents angles. Les lignes *d'intersection* qui en résultent appartiennent le plus souvent aux lignes à double courbure, cependant il se présente des cas où on peut les ranger au nombre des lignes à courbure simple, comme par exemple lorsque deux cylindres droits qui ont des diamètres égaux se coupent de telle sorte, que leurs axes se trouvent situés dans un même plan. Dans tous les cas, le but à atteindre sera de représenter sur les différents plans de projections, les projections de ces lignes d'intersections, et il deviendra évident que les opérations que l'on aura à faire, sont les mêmes que lorsqu'il s'agissait de l'intersection du plan avec des surfaces courbes.

Il s'ensuivra en même temps que les points à chercher pour déterminer la forme des courbes d'intersection dans les différentes projections, devront être considérés comme appartenant à chacune des surfaces qui se coupent.

§ 154. — *Problème.* — Deux cylindres ABCD et EFGH (*fig.* 52), (ABCD est représenté ici sous forme de demi cylindre), se coupent dans une direction perpendiculaire l'un à l'autre, de telle sorte que leurs axes AD et IK se trouvent situés dans un même plan; on doit trouver la projection de la courbe suivant laquelle les deux surfaces des cylindres se coupent.

Solution. — On dessinera dans la fig. II la vue latérale des deux cylindres, de telle sorte pourtant que le centre E se trouve placé sur la prolongation de A D ; on les séparera par la ligne de terre xy qui se trouve ici relevé verticalement, et l'arc $n\,l\,n'$ sera alors la projection de la ligne d'intersection des deux surfaces cylindriques.

Sur le plan horizontal (*fig.* III) le cercle $n'\,m\,n\,l$ est la projection du cylindre E F G H, et en même temps celle de l'intersection des deux cylindres.

Il restera encore à déterminer dans la fig. I la projection de la courbe d'intersection. A cette fin on mène de n (*fig.* II) une perpendiculaire sur xy, et le point N dans la fig. I où cette perpendiculaire coupe la ligne I K, sera alors le point le plus élevé de la courbe ; en effet, si on se représente un plan passant par I Q et parallèle à A B, dans ce cas sa courbe d'intersection avec le cylindre formera un demi cercle A B C D, qui sera coupé en N par le côté K N du cylindre vertical, comme dans la fig. II, les côtés correspondants $k\,n$ et $k'\,n'$ coupent le demi cercle A I A' en n et n'. Par suite N sera la projection des points d'intersection n et n'. Mais de même aussi L et M seront les deux points inférieurs de la courbe qu'on cherche, car ils sont les points où la ligne inférieure B C du cylindre horizontal est coupée par les lignes E F et G H du cylindre vertical, et de cette manière on aura trouvé trois points points essentiels des lignes courbes que l'on a à déterminer. Afin de déterminer ensuite les autres points nécessaires pour le tracé exact de la courbe, on choisit sur l'arc de la fig. II, entre n et l, un point p à volonté ; de ce point on abaissera sur xy une perpendiculaire et une parallèle à la même ligne qui coupera dans la fig III le cercle en p et p', après quoi on fera dans la fig. I. $OP = OP' = op$ (*fig.* III) ; et P et P' seront de nouveau deux points de la courbe à tracer. Si l'on se représente que le cylindre $n\,k\,k'\,n'$ dans la fig. II est coupé en $p\,p'$ par un plan parallèle au plan horizontal, le contour de ce plan d'intersection formera alors un cercle $n\,l\,n'\,m$ (*fig.* III), et conséquemment le point p, dans la fig. II, sera la projection des points p et p' (*fig.* III). La corde pp' (*fig.* III) sera par suite la distance horizontale de ces deux

points, et comme P P′ (*fig.* I) a été fait égal à *p p′* (*fig.* III), les points P et P′ seront ainsi dans leur véritable position, attendu que leur distance verticale de B C a été rigoureusement déterminée par la fig. II, et leur distance horizontale par la fig. III, c'est-à-dire que P S = P′ S = *ps* = *p′ s′*. et P P′ (*fig.* I) = *p p′* (*fig.* III).

Pour la détermination des autres points que l'on a choisi dans la fig. II entre *l* et *n*, on procédera de même qu'on vient de le faire pour déterminer les projections du point *p* (*fig.* II) dans la fig. I, et il est évident que l'on trouvera d'autant plus exactement la projection des lignes d'intersection des deux cylindres, qu'on aura admis un plus grand nombre de points entre *l* et *n* (*fig.* I).

La courbe d'intersection résultant ici est une ligne courbe à double courbure.

§ 155: — Si l'on donne au plan horizontal (*fig.* 52. III) une position inclinée par rapport à la ligne de terre $x y$, comme cela a lieu pour la fig. IV, et si on veut en représenter la projection verticale (*fig.* V); dans ce cas, un examen attentif des fig. IV et V permettra de juger quelles sont les constructions qui conviennent le mieux pour ce but, puisque les points correspondants ont été désignés dans toutes ces figures par les mêmes lettres. Seulement il y a encore à observer que les distances horizontales des points N et N′, P et P′, L et M, s'obtiendront par les perpendiculaires que l'on élèvera sur $x y$ des points semblablement désignés de la fig. IV, dans la fig. V, et que leurs distances verticales de B *c* (*fig.* V) seront faciles à déterminer par les distances verticales correspondantes de la fig. I, c'est-à-dire par N Q, P S et P′ S.

§ 156. — Dans la fig. 52 VI, le cylindre F L N M G (*fig.* I) est dessiné à part, dans la position qui lui appartient dans la fig. V, et tel qu'il se montrerait en effet s'il était séparé du cylindre A B C D; et que si au lieu de couper le cylindre A B C D, il ne venait que s'y accoler.

Si, au contraire, le cylindre A B C D était percé par un autre cylindre, alors les courbes trouvées dans les fig. I et V donneront les projections de l'ouverture faite par ce cylindre.

§ 157. — Si A B C D (*fig.* 52 I) au lieu d'être un cylindre

est une prisme triangulaire (soit le triangle A *l* A' (*fig.* II) sa base, et si *r k k' r'* est un cylindre qui coupe ce prisme; alors la ligne brisée *r l r'* sera dans la fig. II la projection de la ligne d'intersection de ces deux corps, et dans la figure III ce sera le cercle *n l n' m* qui sera cette projection. On trouvera d'autre part, dans la fig. I, cette projection L T' R T M en suivant en tout point la voie tracée dans le § 154. Dans ce cas, le point N recule en R, et les points L et M ne changent pas. Mais si dans la fig. II on prolonge *s p* jusqu'en *t*, et qu'on admette *t* comme étant un point dans lequel les surfaces des deux corps se coupent, et dont on veut déterminer la position dans la fig. I, dans ce cas on mènera de nouveau, de *t* à la fig. I, une horizontale, et on prolongera SP et S' P' jusqu'à ce qu'elles coupent cette ligne en T et T', ou plutôt on fera T T' = *p p'* (*fig.* III); alors T et T' seront deux points de la ligne d'intersection cherchée. Si, d'autre part, on adopte entre *r* et *l* (*fig.* II) encore d'autres points, on pourra trouver leur position dans la fig. I par le même procédé, et représenter, avec d'autant plus d'exactitude, la projection de la ligne d'intersection cherchée, qui est ici une courbe à simple courbure.

§ 158. — Si enfin on admettait que A B C D (*fig.* 52 I) est un cylindre, E F G H au contraire un prisme, et que par suite *n l n' m* (*fig.* III), au lieu d'être un cercle, fût une figure composée de lignes droites, par exemple, un carré *n l n' m*; dans ce cas encore, le procédé décrit au § 154 suffira pour déterminer dans la fig. I les lignes d'intersection des deux corps, et l'on trouvera dans la fig. I les courbes à simple courbure L U' N et N U M comme étant ces lignes d'intersection, attendu que, dans la fig. III, *u* et *u'* sont les points où les côtés *m n* et *n l* du carré sont coupés par la perpendiculaire abaissée de *p*.

§ 159. — Si, dans l'hypothèse des deux derniers paragraphes, on a donné à la projection horizontale une position inclinée vers la ligne de terre *x y*, comme c'était le cas dans la fig. IV, et si on veut en tracer la projection verticale (*fig.* V), alors on marquera de nouveau dans les fig. II, III et IV les points qui correspondent par les mêmes lettres de l'alphabet, les uns avec les grandes, les autres avec les petites, et l'on cherchera

par les fig. II et IV, à l'aide de lignes horizontales et verticales, les points d'intersection nécessaires pour déterminer la courbe dans la fig. V.

Si, dans l'hypothèse du § 157, on dessine le cylindre *rkk'r'* (*fig.* II) tel qu'il a été dit au § 156, il aura alors, avec la surface à laquelle il est joint, la forme de la figure VII. Dans cette figure, on peut se représenter le prisme triangulaire comme étant enlevé, et si l'on dessine à part, d'après l'hypothèse du § 158, le prisme quadrangulaire *nkk'n'* (*fig.* II), alors on aura par la figure VIII la représentation de la forme de ce prisme avec la surface à laquelle il est joint.

§ 160. — *Problème.* — Trouver la projection de la ligne d'intersection de deux cylindres ABCD et EFGH (*fig.* 53-I), lorsqu'ils ont la position et la grandeur représentées dans la figure I et mieux encore dans la figure II.

Solution. — On n'aura qu'à chercher la projection de la ligne d'intersection des deux cylindres dans la figure I; car dans la vue latérale (*fig.* II), le cercle ATB est lui-même la projection de cette ligne d'intersection, comme il est facile de le voir, et le cercle MI (*fig.* III) est, dans la projection horizontale, la projection de cette même courbe. Comme maintenant le côté IK (*fig.* II) du cylindre vertical touche en T le cylindre placé horizontalement, il s'ensuit que ce point T appartient aux deux lignes d'intersection qui se trouvent des deux côtés de LM. Il est de même facile à démontrer que, lorsque du point *q* (*fig.* II), où l'axe BT est coupé par la ligne milieu NO du cylindre vertical, on mène une parallèle à *x y* (*fig.* III) et une perpendiculaire sur *x y* (*fig.* I), et que là on fasse QQ $= qq'$ (*fig.* III) égal au diamètre du cylindre vertical, on voit, dis-je, que *q* et *q'* sont les points dans lesquels les côtés Q'F et QG pénètrent dans la surface courbe du cylindre ABCD. Les points P et P', de même que R et R' (*fig.* I) sont, comme dans la fig. précédente, déterminés par les points *p* et *r* (*fig.* II), pris à volonté, et ainsi la courbe TQ'*b*QT est la projection de la ligne d'intersection, dont toutefois la portion QR*b*R'Q' n'est pas visible dans cette figure.

Si, au contraire, on se représente que le cylindre EFGH (*fig.* I) est enlevé, alors toute la courbe, tant au-dessus qu'au-

dessous de LM, donnera la projection de l'ouverture faite dans le cylindre ABCD. Il y a encore à remarquer que cette courbe est à double courbure.

§ 161. — Si l'on eût donné à la fig. 53 III une position inclinée vers la ligne de terre, comme cela a eu lieu pour la fig. 53 IV, alors, ici comme là, on pourrait trouver la projection de la ligne d'intersection sur le plan vertical correspondant, de la même manière que pour la fig. 52 V.

§ 162.—Si ABCD (*fig.* 53-I) n'est pas un cylindre, mais au contraire un prisme à quatre pans, par exemple, dont le quarré ATBL*t* (*fig.* II) soit la base, et si, par contre, EFGH est un cylindre; ou bien si ABCD reste un cylindre, et si, au contraire, on admet EFGH comme étant un prisme dont le quarré M*q* *lq'* (*fig.* III) serait, par exemple, la base; alors on procédera, pour trouver les projections de leurs lignes d'intersection, de la même manière qu'on l'a fait dans les § 157 et 158. Dans le premier cas, on devra fixer son attention sur les points d'intersection T, *u*, *v*, *w* B (*fig.* II); dans le second cas, au contraire, sur les points Z et *i* (*fig.* III). Les lignes d'intersections résultantes seront des lignes à simple courbure.

§ 163. — Par les fig. 52 et 53, on voit en même temps comment on peut trouver les projections des lignes d'intersection de deux surfaces cylindriques, lorsque celles-ci ne se coupent ni comme dans la fig. 52, ni comme dans la fig. 53, mais en d'autres points pris à volonté, parce que, par le changement de position du cylindre EFGH, la forme de la ligne d'intersection change à la vérité, mais les constructions nécessaires pour la trouver ne changent point, et par suite on peut chercher de la même manière les points nécessaires pour la détermination de la courbe, comme il a été enseigné.

Si les deux cylindres qui se coupent perpendiculairement ont des diamètres égaux, et si leurs axes se trouvent situés dans un même plan, alors la projection de leur intersection se représentera par des lignes droites dans leur projection verticale, par des cercles dans leur projection horizontale, et par des ellipses dans la projection parallèle à l'un des axes, comme on pourra le voir bientôt.

§ 164. — *Problème.* — Deux cylindres droits *abcd* et *efgh*

(*fig.* 54-A), de même diamètre, se coupent suivant une direction oblique, et de telle manière que leurs axes se trouvent dans un même plan; tracer dans les différentes figures les projections des lignes d'intersection, ainsi que celles des cylindres en général.

Solution. — Soit la figure A la vue antérieure, alors la projection des intersections des deux surfaces apparaîtra dans cette figure sous forme des lignes droites *mk* et *il*; car comme les deux cylindres qui se coupent ont des diamètres égaux, le contour du plan d'intersection passant par le cylindre *abcd*, et figuré par la ligne *mk*, rencontrera le contour du plan passant par le cylindre *efgh*, également représenté par *mk*, et formera deux ellipses égales, attendu que les axes des deux cylindres, aussi bien le grand que le petit, sont égaux les uns les autres. L'on doit, par suite, envisager l'ellipse passant par *mk* comme un plan suivant lequel, par exemple, les cylindres *akmd* et *gkmh*, obliquement coupés, se réunissent; de même l'ellipse passant par *il* peut être considérée comme étant le plan de jonction sur lequel les deux cylindres *bilc* et *hilg*, obliquement coupés, viennent aussi se rencontrer, puisque la ligne *il* peut figurer aussi bien la projection d'un plan d'intersection passant par le cylindre *abcd* que la projection d'un plan d'intersection passant par le cylindre *efgh*. Par ces motifs, les lignes d'intersection de ces deux cylindres égaux ne forment pas des lignes à double courbure, mais elles apparaîtront comme étant des ellipses, et, par suite, comme lignes à simples courbures. Dans la vue de côté (*fig.* B), la coupe passant par *mk* (*fig.* A) apparaît comme une ellipse *mokp*, et celle qui passe par *il* aussi comme une ellipse *iolp*. Dans la vue (*fig.* C), le cercle *piom* est aussi bien la projection du cercle passant par *ad* (*fig.* A) que celle de l'ellipse passant par *il*, *km*, et *bc*.

Si le cylindre *abcd* (*fig.* 54-A) se meut autour de son axe *rs*, de telle manière que la projection horizontale prenne la position figure D; alors on trouvera la vue figure E à l'aide des deux vues A et B. Dans cette vue se trouve l'ellipse *mpko* qui est la projection de l'ellipse passant par *km* (*fig.* A), comme l'ellipse *iplo* est la projection de l'ellipse passant par *il* (*fig.* A).

Ces deux ellipses *se coupent dans la ligne droite p o*, ligne dont le point O est la projection dans la figure A, de telle sorte que l'on peut comprendre en même temps, à l'aide de la fig. E, *comment on peut trouver les lignes d'intersection de deux surfaces elliptiques qui ont une position inclinée vers le plan de projection verticale*.

Si l'on se représente enfin les cylindres partagés en quatre portions séparées les unes des autres par les intersections; dans ce cas, on peut, comme on l'a indiqué pour la figure précédente, dessiner ceux-ci à part. Quant à ce qu'il y aurait encore à dire pour cette construction, un examen de ces figures suffira, ainsi que ce qui a été dit precédemment.

§ 165.—*Problème*.—Deux cylindres droits ABCD et EFGH (desquels ABCD est représenté comme demi-cylindre) (*fig*. 55-I), de différents diamètres, se coupant dans une direction oblique, et de telle sorte que les deux axes se trouvent dans un même plan; indiquer les projections des lignes d'intersection à double courbure des deux surfaces cylindriques qui en résultent.

Solution. — Dans la vue latérale (*fig*. II), l'arc *u b n'* est la projection de la ligne d'intersection, comme il est facile de le démontrer. Mais pour trouver cette projection dans la fig. I, on choisit dans la figure II un point à volonté *p* situé entre *b* et *n*; de ce point on abaisse sur *xy*, vers la figure I, une perpendiculaire; on projette ensuite ce même point sur le contour de l'ellipse FKGK' en *p* et *p'*, et de ces deux derniers points on mène de rechef des perpendiculaires sur *x y*, jusqu'à ce qu'elles coupent en *p* et *p'* la ligne FG (*fig*. I). Si maintenant on élève en ces points des perpendiculaires sur FG, alors les points *p* et *p*, dans lesquels ils coupent les lignes horizontales menées en premier de *p* (*fig*. II), seront deux points de la courbe cherchée. On agira de la même manière pour le point *r* pris à volonté entre *b* et *u*, à l'aide duquel on obtient dans la fig. I les points *r* et *r'*; si enfin on relie les points ainsi trouvés avec les points L N et M (dont la position s'indique d'elle-même dans le dessin) par une ligne courbe, alors celle-ci sera la projection de la ligne d'intersection des deux surfaces cylindriques dans la figure I.

La justesse de cette opération est rendue évidente par la construction elle-même, car les points *p* et *p'* de la courbe L N M n'ont pas changé de distance par rapport à BC, parce que *pt* (*fig.* 1) = *p t* (*fig.* II), et leur distance horizontale a été rigoureusement déterminée par la projection des points *p* et *p'* de l'ellipse FKGK' vers la ligne FG, et de là sur la courbe d'intersection.

Il va sans dire que le cylindre EFGH, lorsqu'il passe dans la moitié supérieure (qui manque ici) du demi-cylindre ABCD (*fig.* 1), décrit de nouveau dans son passage la courbe LNM qui vient d'être trouvée, seulement dans une position inverse de celle qui est figurée ici.

§ 166. — Pour trouver dans la projection verticale inférieure (*fig.* 55 III) la projection de la ligne d'intersection des deux surfaces cylindriques, on abaisse des points L *r p* N' *p' r'* M (*fig.* 1) des perpendiculaires sur la fig. III ; dans celle-ci on fait *rr'*=*rs* (*fig.* II), *pp'* (*fig.* III)=*p q* (*fig.* II) et *m n'* (*fig.* III)=*m n'* (*fig.* II), en ayant cependant soin que la ligne médiane BC divise lesdites perpendiculaires en deux parties égales, comme cela a eu lieu en *o* de la ligne *nn'* (*fig.* III), ensuite on relie ces points ainsi trouvés avec *l* et *m* par une courbe, et l'on aura ainsi dans la fig. III la projection demandée.

§ 167. — Si ABCD (*fig.* 55 I), au lieu d'être un cylindre, était un prisme à trois pans, par exemple, et que A' *b* A' (*fig.* II) fût sa base, et si ce prisme était coupé par un cylindre EFGH, alors la projection de l'intersection des deux corps sera facile à déterminer d'après ce qui a été dit jusqu'ici, et elle sera figurée dans la fig. 1 par la courbe LUM à simple courbure, sans aucune difficulté.

§ 168. — *Problème.* — Un cylindre droit ABCD (*fig.* 56) est coupé par un cône droit EFG, de telle manière que leurs axes, se rencontrant perpendiculairement, se trouvent dans un même plan ; tracer la projection de l'intersection des deux surfaces courbes.

Solution. — Dans la fig. II les arcs *m i m'* et *o l o'* sont les projections des lignes d'intersection. Dans la fig. I les points I, M, K, et L, O, N, s'obtiennent d'eux-mêmes, attendu qu'ils appartiennent à la courbe, et il ne reste donc plus que de trouver entre ces points d'autres points pour déterminer le

tracé de la courbe. On choisira, à cet effet, entre i et m (*fig.* II), un point à volonté p, on mène par ce point une perpendiculaire sur xy allant vers la fig. 1, laquelle ligne coupera en même temps, dans la fig. II, les côtés EH et EH' du cône en r et r'; de r on abaisse une perpendiculaire rs sur HH' et on décrit avec Gs un demi-cercle. Si maintenant on abaisse une perpendiculaire pq du point p admis à volonté sur HH', et si on la prolonge jusqu'à ce qu'elle coupe le demi-cercle en p'; enfin si l'on fait $rp = rp'$ (*fig.* I) $= qp'$ (*fig.* II), alors p et p' seront deux points appartenant à la courbe (*fig.* 1). Et si on cherche encore un plus grand nombre de ces points, et si on relie par la courbe IMK, on obtiendra alors la projection de la ligne d'intersection à double courbure dans la fig. 1.]

On restera convaincu de l'exactitude de ce procédé en examinant dans la fig. 1 les distances verticales des points p et p' à Bc et leurs distances horizontales, telles que les donnent la construction de la figure et surtout en comparant les deux figures.

Il n'est pas besoin de dire que la courbe LON peut s'obtenir de la même manière.

Si l'on décrivait dans le demi-cercle tracé au-dessous H H' avec Gu un demi-cercle concentrique ainsi que la courbe $m\,p'\,i'\,p'\,m'$, on aura figuré la projection horizontale de la moitié de la courbe d'intersection. Il va sans dire que cette ligne courbe pourra être tracée avec d'autant plus d'exactitude qu'on aura admis un plus grand nombre de points sur l'arc $i\,m$.

§ 169. — Si ABCD (*fig*, 56 I) était un prisme à quatre pans, alors le point le plus élevé de la ligne d'intersection recule vers V, comme on peut le voir par la figure 1, et la courbe à simple courbure IVK sera trouvée par la voie indiquée, seulement il sera nécessaire, pour la détermination de ses points, de tracer au-dessous de H H' d'autres demi-cercles.

§ 170. — *Problème.* — Le cône droit EFG (*fig.* 57 I) est coupé par le cylindre droit ABCD, de telle sorte que les côtés du premier (voir la fig. 1) touchent le cylindre en o et o'. Trouver la ligne d'intersection des deux surfaces courbes.

Solution. — Le cercle AODO' est dans la fig. II la pro-

jection de l'intersection, et dans la fig. 1 il apparait sous forme des lignes droites TK et HL qui se coupent en O, comme étant la projection du point O (*fig.* II). Si on se représente des plans passant par IK et HL, ceux-ci formeront, tant sur le cône que sur le cylindre, les mêmes ellipses dont les grands axes sont les lignes IK et HL et dont les petits axes sont le diamètre du cylindre (*pp' fig.* II).

D'après la méthode générale de solution, on choisirait dans la fig. II plusieurs points dans la projection de la ligne d'intersection elle-même, et on tracerait les cercles et perpendiculaires correspondantes. Après quoi on trouverait que, par exemple, *p* et *v* viennent coïncider avec la ligne droite HL, et *p'* et *v'* avec IK. Si on trace à D (*fig.* II) la tengente horizontale *w w'*, et si l'on décrit par *z z'*, comme étant la projection de *w w'* un demi-cercle *z k z'*; enfin, si on mène par *o'*, *p*, *v'*, *k*, *v''*, *p'*, *o'* une ligne courbe, celle-ci sera alors la projection horizontale de la ligne d'intersection, et pour la moitié seulement de la figure; elle formera en même temps une portion d'ellipse, parce qu'elle est la projection d'une ellipse.

§ 171. — Si l'on donne à l'axe PP' du cylindre ABCD dans la figure 57 I une position inclinée au plan vertical, alors les deux corps apparaitront sur le plan vertical tels qu'ils sont figurés dans la fig. III. Cette vue sera facile à dessiner, d'après les indications précédemment données; car le cône formera un triangle semblable à un des deux triangles dessinés en premier lieu; la forme du cylindre s'obtiendra facilement d'après l'inclinaison de l'axe, et l'on n'aura qu'à représenter dans (*fig.* III) les lignes d'intersection des deux corps qui seront la projection d'ellipses à inclinaison double, dont on connait et les axes et l'inclinaison.

On a fait voir dans les figures IV, V, VI et VII, quelle forme les parties séparées du cône et du cylindre doivent recevoir d'après la fig. III. Ajoutons encore qu'il est nécessaire, pour la représentation de la fig. III, de dessiner d'abord la projection horizontale des corps dans l'inclinaison qui a été supposée vers la ligne de terre, pour pouvoir construire dans la fig. III les ellipses AD, BC, IK et HL, qui en résultent.

§ 172. — *Problème.* — Une sphère *g h* (*fig.* 58 I) est cou-

pée par un cylindre *ac*, de telle manière que les axes des deux corps se trouvent sur une même ligne droite ; trouver la projection des lignes d'intersection des deux corps.

Solution. — Dans le cas où ces deux corps ont un axe commun, le plan que l'on fera passer par la droite *ik* perpendiculairement au plan de projection verticale, formera un plan d'intersection des deux corps, et enlèvera un morceau de la sphère dont le contour est égal à celui du cylindre. Par suite, dans la fig. I, les lignes droites *ik* et *lm* seront la projection des lignes d'intersection, et dans la fig. II ce sera le cercle *a e b e'*.

Outre cela, il faut en général remarquer que *la projection d'une sphère est toujours un seul et même cercle*, quelque soit l'inclinaison qu'on ait donnée à un de ses diamètres, relativement au plan de projection.

§ 173. — Si l'on donne à l'axe *ef* (*fig.* 58 I) une certaine inclinaison vers *xy*, ou une inclinaison double au plan de projection verticale, alors les cercles semblables qui passent par *ab*, *ik*, *lm* et *dc* apparaissent dans la projection horizontale et verticale sous forme d'ellipses semblables que l'on peut construire séparément d'après les § 104 ou 107, et que l'on peut ensuite replacer facilement dans les positions qu'elles doivent avoir dans la figure.

§ 174. — Si l'on se représente sur un plan de projection horizontale un plan vertical passant par *gh* (*fig.* 58 II), et en même temps la moitié inférieure *gfh* comme étant enlevée, alors la fig. I pourra aussi bien représenter l'image d'une demi-sphère concave que d'un demi-cylindre concave. Dans cette hypothèse il sera également facile de tracer la projection des corps et de leurs lignes d'intersection, surtout si leurs axes ont l'inclinaison indiquée dans les paragraphes précédents. Seulement il faut observer qu'il y aura des lignes qui devront être tirées en plein, et d'autres qui ne devront être que poncuées selon qu'elles seront vues ou cachées.

§ 175. — Si *abcd* (*fig.* 58 I) est un prisme, par exemple à 4 pans, ayant une base de forme carrée *ache'* (*fig.* II), alors on décrira avec *oq*. comme rayon, un cercle inscrit à ce carré ; on mènera dans la fig. I la ligne droite *st* qui sera la projec-

tion de ce cercle, et l'on projettera les points q et r de la fig. II sur la fig. I dans la ligne st. Si alors on trace dans cette projection verticale les courbes lqp et prm, elles formeront la projection des lignes d'intersection de la sphère avec le prisme sur le plan vertical. Et si, pour une détermination encore plus exacte de cette projection des lignes d'intersection, on veut admettre un plus grand nombre de points, on décrira alors dans la fig. II du point o plusieurs cercles dont les rayons devront être toutefois plus grands que oq et plus petits que oa; on projettera ceux-ci aussi bien que leur intersection avec ae et eb de la fig. II dans la fig. I, et l'on aura ainsi trouvé les points intermédiaires.

§ 176. — *Problème.* — Un cylindre EFGH passe par une demi-sphère ADB (*fig.* 59 I), suivant la direction de cette figure; on veut connaître les projections de la ligne d'intersection à double courbure de ces deux corps sur la fig. I et II.

Solution. — Dans le plan horizontal (*fig.* II) la projection de la ligne d'intersection de ces deux corps apparait sous forme d'un cercle $nqmq'$, et il faudra commencer par déterminer la projection de cette courbe dans la fig. I. A cet effet, on prendra dans le cercle $nqmq'$ (*fig.* II) un point à volonté p, on décrira avec le rayon op un demi-cercle, on élèvera au point s, où il coupe le diamètre A'B', une perpendiculaire qui coupera dans la fig. I le cercle ADB en s; par ce point s on mènera une horizontale ss'; alors les points p et p' de cette ligne, où elle est coupée par les perpendiculaires élevées de p et p' (*fig.* II), seront deux points de la courbe cherchée.

Comme les points p et p' dans la fig. II se trouvent situés dans la projection de la ligne d'intersection des deux corps, il en résulte que ces deux points appartiendront aussi bien à la surface de la sphère qu'à celle du cylindre; mais ils se trouvent en même temps dans le cercle décrit avec op, et comme la ligne droite ss' dans la fig. I est la projection de ce demi-cercle, il s'ensuit que les points p et p' dans la fig. I seront les projections des points p et p' dans la fig. II.

On peut encore se convaincre plus rigoureusement de la justesse de ce procédé, lorsqu'on se rappellera qu'un plan passant par ss' (*fig.* I) parallèlement au plan horizontal, ap-

paraît dans sa projection dans la fig. II, sous forme de deux cercles non concentriques *s z s'* et *nqmq'*. Mais ces cercles situés dans un plan appartiennent aux surfaces des deux corps qui se coupent, il faut par suite aussi que les points *p* et *p'*, dans lesquels ces cercles se coupent, se trouvent placés à la surface *de ces deux corps*, et par conséquent ils doivent être deux points de la ligne d'intersection des deux surfaces courbes. Et comme *p* et *p'* (*fig.* I) sont les projections de ces points et se trouvent sur la ligne droite *s s'* qui est la projection de ces deux cercles, il faudra aussi que *p* et *p'* (*fig.* I) soient deux points de la courbe d'intersection.

Le même raisonnement peut être fait pour la détermination des points *q*. *r*. *m* et *n*, seulement il y a à remarquer qu'il n'est pas nécessaire de s'occuper des points *q* et *q'* dans la fig. II, parce qu'ils sont donnés par les point *q* et *q'* de la fig. I, où les côtés EH et FG du cylindre passent à travers la sphère; qu'en second lieu, les points *m* et *n* (*fig.* II) sont le point supérieur et inférieur de la courbe dans la fig. I; et qu'en troisième lieu, si le point *r* dans la fig. II est choisi de telle manière que sa perpendiculaire sur *xy* passe par le point *p*, cela simplifie la construction.

Enfin, il y a encore à remarquer que si dans la fig. I on construit la sphère entière, la ligne d'intersection, suivant laquelle le cylindre entre dans la sphère, est reproduite exactement à sa sortie inférieure, et que par conséquent la courbe est la même, seulement dans une position inverse.

§ 177. — Si on se représente le cylindre comme enlevé de la sphère, alors ces courbes formeront les projections de la ligne d'ouverture faite par le cylindre dans la sphère.

§ 178. — Pour trouver la projection de cette ligne d'intersection dans la vue latérale (*fig.* 79 III), on mène des points *i*, *k*, *l*, *s* et *t* (*fig.* I) des perpendiculaires à la ligne de terre verticale XY, se dirigeant vers la fig. III, perpendiculaires qui vont couper le rayon A'D' de la sphère en *i*, *k*, *l*, *s*, et *t*: l'on fait ensuite *im* (*fig.* III) = *om* (*fig.* II), *kr* (*fig.* III) = *vr* (*fig.* II), *lq* (*fig.* III) = *wq* (*fig.* II), *sp* (*fig.* III) = *vp* (*fig.* II) et *tn* (*fig.* III) = *on* (*fig.* II). La courbe *mn* que l'on mène après cela par ces points est la projection cherchée de la ligne d'intersection des deux corps.

Un examen attentif de la figure justifiera sans peine ces constructions, si on songe en outre que les horizontales que l'on a menées dans la fig. III, par les points i, k, l, s et t, sont les projections des cercles correspondants de la fig. II.

§ 179. — *Problème.* — Une sphère ABCD (*fig.* 60 I) est coupée par le cylindre EFGH, dont le diamètre est égal au rayon de la sphère dans la position et la direction que l'on a sous les yeux; dessiner les projections des lignes d'intersection à double courbure dans les fig. I, II et III.

Solution. — On choisira de nouveau dans la fig. II, dans laquelle la projection de la ligne d'intersection apparaît sous forme d'un cercle, les points p, q et r, comme on l'a fait remarquer pour la figure précédente, on décrira avec op, oq et or des demi-cercles, on projettera ceux-ci dans la fig. I où ils apparaissent sous forme des lignes droites ll' kk' et ii', et l'on déterminera sur elles p et p', q et q', r et r' comme étant les projections des points correspondants de la fig. II. Si donc on mène par ces points une ligne courbe, telle qu'elle est tracée par N et D dans la fig. 1, celle-ci sera la projection de la courbe cherchée; il va sans dire que la ligne d'intersection NB, passant par la moitié supérieure de la sphère, doit être symétrique avec la courbe que l'on vient de trouver.

La courbe ND', dans la fig. III, qui est la projection de la ligne d'intersection des deux corps dans la vue latérale est obtenue par la voie indiquée au § 178, c'est-à-dire que l'on fera ON (*fig.* III) = oN' (*fg.* II), ir (*fg.* III) = mr (*fg.* II), kq (*fg.* III) = sq (*fg.* II, et lp (*fig.* III) = mp (*fg.* II), et que par ces points on mènera la courbe ND'.

§ 280. — Si l'on tourne la sphère avec le cylindre qui la traverse (*fig.* 60 I) autour de l'axe vertical BD, de telle manière que la projection horizontale, représentée en la fig. II, vienne se placer, par rapport à la ligne de terre, dans la position (*fig.* IV), alors on trouvera sur le plan vertical (*fig.* V) la projection de la ligne d'intersection des deux surfaces courbes, à l'aide des fig. I et IV, en se servant de la construction connue, telle qu'on la voit facilement par les points correspondants désignés par les mêmes lettres.

Le procédé est facile à justifier pour cette figure comme

pour celle des fig. I et III, si l'on fait attention que les distances verticales des points p, q, r, r'.... à la ligne de terre horizontale xy, restent les mêmes dans les trois figures verticales, tandis que, pour les fig. II et IV, le changement des distances horizontales de ces points l'un à l'autre, est produite par la construction qui est le but de la figure (1).

§ 181. — Si l'on se représente le cylindre enlevé de la sphère, alors les courbes trouvées dans la fig. 60 en I, III et V, comme aussi les cercles des fig. II et IV, formeront les projections des ouvertures faites dans la sphère par le cylindre.

Il est évident que la construction à faire reste la même, lorsqu'il s'agit de figurer des corps concaves. Il ne faudra plus que voir quelles lignes devront être tracées en plein, ou celles qu'il faut ponctuer, ce qu'il sera facile de juger avec un peu d'attention. Si la sphère est coupée par un cylindre oblique, alors la construction que l'on est obligé d'employer pour trouver la ligne d'intersection des deux surfaces courbes, s'obtient d'après les indications du § 388 (*fg.* 132).

§ 182. — Si une sphère est coupée par un cône droit, de telle sorte que l'axe du cône passe par le centre de la sphère, et que par suite les axes des deux corps coïncident, alors la construction qu'il faut employer, tant pour la représentation des corps eux-mêmes que pour leurs lignes d'intersection, est tout à fait conforme à ce qui a été dit dans le § 172 de la sphère et du cylindre. Ici aussi les lignes d'intersection apparaîtront dans les différentes figures comme lignes droites, comme cercles ou même comme ellipses, si la figure est inclinée, et pourront être retrouvées sans indication nouvelle.

§ 183. — *Problème.* — Une sphère ABCD (*fg.* 61. I) est coupée par un cône droit EFG, dans la position indiquée ici; tracer les projections des lignes d'intersection à double courbure, dans les différentes figures.

Solution. — Si l'on admet que les deux corps ont, par rapport au plan de projection verticale, une position telle que le

(1) Nous avons encore indiqué, dans le § 187, une autre méthode de solution, et peut-être plus commode pour ce cas.

plan qui passe par les deux axes EH et BD (*fg.* 1) lui soit parallèle, alors la projection F' C' de ce plan, dans le plan de projection horizontale (*fig.* II) qui n'est que la moitié antérieure de la figure, est parallèle à $x y$. Comme maintenant les points m et n (*fig.* 1), où la surface de la sphère est coupée par les côtés EF et EG du cône, sont deux points de la courbe cherchée, alors leurs projections m' et n' sur la ligne F' C' (*fig.* II) seront aussi deux points de la projection de la ligne d'intersection. Pour trouver ensuite un plus grand nombre de points de ce genre, on tracera à une distance à volonté entre m et n, dans la fig. 1, une ligne $q q$ parallèlement à $x y$, on projettera les points q et q, comme aussi les points r et s, où la circonférence de la sphère et les côtés du cône sont coupés par la ligne $q q$, sur la ligne F' C' (*fig.* II) pour les points q', r', s' et q', et là on décrit du point B' en passant par r', q', et de E' en passant par s' q' les demi-circonférences $r' p' q'$ et $s' p' q'$. On projettera alors le point p' où les deux moitiés du cercle se coupent dans la fig. I sur la ligne $q q$ au point p; p sera alors dans la fig. 1 et p' dans la fig. II un point de la ligne d'intersection cherchée des deux corps sur le plan vertical et horizontal.

En effet, si l'on se représente que l'on a fait passer par la ligne $q q$ (*fig.* 1) un plan parallèlement au plan horizontal, alors la projection de ce plan d'intersection, s'il passe par la sphère, formera le demi-cercle $r' p' q'$, et s'il passe par le cône, le cercle $s' p' q'$. Or, comme ces deux cercles appartiennent à la surface des deux corps, il faut aussi que le point p', dans lequel ils se coupent se trouve situé à la surface des deux corps et comme tel, être un point de la ligne d'intersection des deux surfaces courbes tant sur le plan vertical que sur le plan horizontal.

Si l'on veut, pour déterminer d'une manière plus rigoureuse la forme de la courbe, choisir encore d'autres points, dans ce cas, on mènera dans la figure 1, entre m et n, quelques autres lignes parallèles à $q q$ ou $x y$; on suivra du reste le même procédé précédemment décrit, et l'on projettera de nouveau les points d'intersection de la demi-circonférence engendrée de la même manière, de la figure II sur les lignes droites de la figure 1. Si enfin on relie ces points ainsi trouvés dans

la fig. I par la courbe mpn, et dans la fig. II par la courbe $m'p'n'$, on obtiendra ainsi dans les deux figures les projections des lignes d'intersection cherchées.

Il va sans dire que, dans la fig. II, la seconde moitié de la projection horizontale, que l'on n'a pas représentée ici, sera tout-à-fait symétrique.

Il faut encore faire observer que, dans la fig. I, la courbe tuv, suivant laquelle le cône traverse la partie supérieure de la sphère, peut être trouvée de la même manière que mpn; il en sera de même dans la fig. II pour la courbe $t'u'v'$.

Enfin, il y a encore à ajouter que, lorsqu'on donne à la projection horizontale (*fig.* II) une position inclinée vers xy, comme cela a eu lieu dans la fig. 60 (IV), on pourra trouver par la voie indiquée alors les projections des lignes d'intersection sur le plan vertical correspondant.

§ 184. — Dans la fig. 61 III, la sphère et le cône qui la traverse ont été dessinés dans une position telle que le plan qui passe par leurs deux axes n'est plus parallèle au plan vertical, mais lui est perpendiculaire. Pour trouver les lignes d'intersection $mknk'$ et $vutu'$ dans cette figure, on suivra les règles données dans le § précédent. Les points n et m se présentent facilement d'eux-mêmes, et l'on fera $ck = ck'$ (*fig.* III) $=$ $E'k'$ (*fig.* II), $zp = zp'$ (*fig.* III) $= zp'$ (*fig.* II), etc. Les points k et k' (*fig.* III) sont les projections du point k (*fig.* I), où le côté EH du cône est coupé par l'intersection mn.

§ 185. — Si l'on mène par le sommet E du cône (*fig.* 61 I), et en même temps par le point B de la sphère un plan parallèle au plan vertical, par conséquent par les lignes EH et BD, alors la ligne droite F'C' sera dans fig. II la projection de ce plan ; dans la figure I, le plan d'intersection apparaîtra au contraire sous la forme du triangle EFG et celle d'un cercle ABCD, et les points m et n ainsi que t et v, où ils se coupent, seront des points qui se trouveront situés sur la ligne d'intersection de deux surfaces courbes. Si l'on se représente maintenant que IL (*fig,* II) est la projection horizontale d'un autre plan parallèle à celui mené par E et B, alors ce plan formera sur le plan vertical (*fig.* I) une hyperbole s'il passe par le cône, et un cercle concentrique s'il passe par la sphère, lignes fa-

ciles à tracer. Mais ces deux courbes qui se coupent ainsi appartiennent aux surfaces des deux corps, et comme elles se trouvent en même temps dans un même plan, alors les points où elles se coupent appartiendront aussi aux deux surfaces courbes, et par suite devront être situées sur leurs lignes communes d'intersection. Si on mène encore dans la fig. II d'autres droites parallèles à F'C', et si de nouveau on envisage celles-ci comme étant les projections de plans d'intersection parallèles au plan vertical, on pourra encore trouver, dans ces cas, dans la fig. I, les hyperboles et les cercles concentriques qui leur correspondent, et les points où ils se coupent dans la fig. I seront situés, d'après les motifs expliqués plus haut, aussi bien sur la surface de la sphère que sur celle du cône, et par suite sur la ligne d'intersection commune aux deux corps, et détermineront, en outre, dans la fig. I, leur projection.

Pour obtenir par le même procédé, dans la fig. III, la projection de ces lignes d'intersection, il ne faut pas mener dans la fig. II les lignes droites parallèlement à F'C'; au contraire, elles doivent être perpendiculaires à ces lignes, ainsi parallèlement à B'O, puis de nouveau tracer dans la fig. III l'hyperbole et les cercles concentriques qui y correspondent, et dont les points d'intersection donneront en cet endroit les courbes *mknk'* et *vutu'* qui seront les projections des lignes d'intersection.

§ 186. — On peut donc considérer le procédé que nous venons d'indiquer comme étant une méthode différente pour trouver et tracer les lignes d'intersection de ce genre; c'est au dessinateur à choisir entre ces deux méthodes de solution laquelle est la plus convenable et la plus facile à employer pour atteindre le but qu'il se propose.

Il sera bon et en même temps facile, pour s'exercer à de semblables constructions, d'employer cette méthode de solution pour les problèmes antérieurs, ainsi qu'on va le faire dans ce paragraphe pour le problème du § 179. Examiner ainsi sous plusieurs faces un seul et même sujet n'est pas seulement d'un haut intérêt pour l'étude de la géométrie descriptive, mais donne encore une grande habitude pour exécuter les construc-

tions de ce genre, chose si désirable et si importante pour celui qui est appelé à représenter les formes variées des corps.

§ 187. — Pour trouver, par exemple, d'après ce procédé, dans la fig. 60, où il est question de l'intersection d'un cylindre avec une sphère, les projections des lignes d'intersection, on tracera dans la fig. II par les points p, q, r et même par plusieurs autres encore du cercle $oqN'q'$ les lignes tt', uu' vv'... parallèlement à A'C', et on les considérera comme étant les projections de plans perpendiculaires qui seront représentés dans la fig. I sous forme de rectangle et de cercles concentriques. Les points p, q, r, p'... de la fig. I, où chaque rectangle est coupé par le cercle qui y est tracé, sont donc, dans cette figure, comme il est facile de le voir, des points de la courbe d'intersection cherchée.

Dans la fig. 60 III, on trouvera les projections des lignes d'intersection de deux corps, en ce qu'on mènera d'abord dans la fig. II, à travers le demi-cercle oqN', les lignes droites perpendiculaires à A'C, par conséquent parallèles à oN', et qu'en suite on dessine dans la fig. III les rectangles et les cercles correspondants.

Pour la représentation de la fig. V, au contraire, après que l'on a tracé, comme pour la fig. IV, la projection horizontale dans une position inclinée, on mènera par les points o, p, r... (*fig.* IV) des lignes droites parallèles à xy, et l'on cherchera après cela dans la fig. V les rectangles et les cercles qui correspondent. Les points où est coupé chaque rectangle par le cercle tracé dans son plan sont encore des points de la courbe d'intersection cherchée.

On pourrait, à la vérité, pour trouver ces points dans la fig. IV, mener des lignes parallèles à A'C', et les envisager comme des projections de plans perpendiculaires; mais alors les plans qui leur appartiennent se montreraient dans la fig. V sous forme de rectangles et d'ellipses, ce qui mènerait au but avec plus de lenteur et de difficulté.

§ 188. — *Problème.* — Tracer la projection de la ligne d'intersection de deux sphères ABC et FGHI (*fig.* 62) qui se coupent.

Solution. — Dans la partie de la géométrie qui traite des soli-

des on montre, premièrement, qu'on peut faire passer par un plan la ligne d'intersection commune à deux sphères qui se coupent, peu importe que leurs diamètres soient égaux ou ne le soient pas (c'est pourquoi aussi la courbe de cette ligne d'intersection est une courbe à simple courbure); deuxièmement, que le contour de ce plan est toujours un cercle; troisièmement, que ce plan circulaire est perpendiculaire à la ligne des centres.

Si, d'après cela, la ligne OK, qui relie les centres, est située parallèlement au plan vertical, comme c'est le cas dans la fig. 62, alors la projection de la ligne d'intersection des deux sphères apparaîtra sous forme de la ligne droite DE; si cette ligne est perpendiculaire à la projection verticale, alors la projection de la ligne d'intersection sera un cercle dont DE sera le diamètre; et si cette ligne forme avec la projection verticale un angle aigu, alors la projection de la ligne d'intersection des deux sphères sera une ellipse dont DE sera le grand axe, et dont le petit axe dépendra de l'angle que forme la ligne des centres OK ou la ligne DE avec le plan de projection verticale. Et comme, d'autre part, la projection d'une sphère, quelle que soit sa position, est toujours un cercle de même grandeur, il n'y aurait rien à ajouter au problème en question, si, en terminant ce chapitre, ce n'était le cas de parler de la méthode générale employée *pour trouver les projections des lignes d'intersection de deux corps à surfaces courbes qui se coupent.*

§ 189. — Ainsi, lorsque des corps terminés par des surfaces courbes se coupent, peu importe que ce soient des sphères, des ellipses, des cônes, des cylindres obliques ou d'autres corps de ce genre, et lorsqu'on veut dessiner les projections de leurs lignes d'intersection, *alors on fait passer par les corps qui se coupent un certain nombre de plans parallèles à l'un ou à l'autre des deux plans de projection.* Ces plans d'intersection déterminent sur la surface des deux corps certaines courbes dont les formes sont déterminées par celles des corps qu'elles coupent; et les points où deux courbes appartenant à un et même plan se coupent, devront nécessairement se trouver sur la ligne d'intersection des deux corps, parce qu'ils sont communs aux deux courbes, et qu'ils se trouvent par suite sur les

deux surfaces courbes. Il ne s'agirait plus que de trouver ces points d'intersection dans les différentes figures, et de les relier les uns aux autres par des lignes, pour tracer la courbe que l'on cherche. Il n'est pas nécessaire de s'en tenir à la direction des plans auxiliaires parallèles aux plans de projection, quand une direction oblique présente plus d'avantage pour la construction. On voit, par exemple, à la fin du § 187, que lorsqu'on se sert d'une direction oblique, et qu'au lieu de mener dans la fig. IV les plans d'intersection parallèlement à xy, on les mène parallèlement à A'C', la construction deviendra d'une exécution plus difficile, à cause de l'ellipse qui se formera dans la fig. V.

§ 190. — Si la figure 62 représentait en projection horizontale deux sphères qui se coupent, et s'il s'agissait de trouver sur ce plan la projection de leur ligne d'intersection DE sur le plan vertical, sans s'inquiéter des principes posés au § 188, touchant les corps solides, on mènera alors la ligne MQ parallèlement à xy, ainsi donc parallèle au plan de projection verticale; avec le rayon des sphères on décrit sur le plan vertical deux cercles dont les centres se trouvent situés sur une ligne parallèle à xy, et dans ces cercles on décrit les cercles concentriques avec les rayons MN et PQ. Les points où ils se coupent appartiennent à la projection de la ligne d'intersection, et qui est sur le plan vertical une ellipse; et si on projette ces points sur le plan de projection horizontale et sur la ligne droite MQ, ils donneront naissance au point R qui se trouvera avec D et E situé sur une ligne droite. Et ainsi on pourra, en continuant à procéder comme nous venons de le faire, trouver encore plusieurs points qui appartiendront sur le plan vertical à ladite ellipse, et sur le plan horizontal à la ligne droite DE.

Si, au contraire, la figure 62 était la projection verticale, on trouvera par le même procédé la projection horizontale et la projection des lignes d'intersection des deux sphères dans les deux figures.

§ 191. — Pour rendre plus clair encore ce qui a été dit, qu'on examine par exemple dans la fig. 60 les deux projections I et II. Si dans la fig. I on place les plans d'intersection parallèlement à xy à l'aide des points A, i, k, l....., alors leurs

projections apparaîtront sur le plan horizontal (*fig.* II) sous forme des cercles A' N' C', *irr'*, etc., coupant le cercle *oq*N' *q'*; si, au contraire, dans le plan de projection horizontale on fait passer les plans d'intersection par les lignes A'C', *tt'*, *u u'*..., alors leurs projections paraîtront sur le plan vertical sous forme de cercles décrits de N avec N A, N *t*, N *u*, N *v* comme rayons, cercles qui sont coupés par les rectangles dans *qq'*, *rr'*... (*fig.* II), et par la perpendiculaire N' B, et ainsi on a abtenu dans la fig. I les points nécessaires pour déterminer la courbe d'intersection.

CHAPITRE V.

—

De la projection et de l'intersection des corps limités par des surfaces planes.

§ 192. De même que l'on peut considérer le cercle comme un *polygone* composé d'une infinité de côtés, de même on peut se représenter un cylindre comme étant un *prisme* régulier et un cône comme une *pyramide* régulière composée d'une infinité de côtés.

D'après cette supposition, on pourra s'expliquer comment les problèmes posés dans le troisième et quatrième chapitre de cette partie de l'ouvrage, relativement aux projections et intersections de cylindres, de cônes et d'autres surfaces courbes, peuvent être appliqués aux prismes, aux pyramides et à d'autres corps de ce genre. L'application de ces principes paraîtra d'autant plus facile, que déjà par le deuxième chapitre on a été suffisamment préparé à de semblables constructions. D'après cette supposition, on pourra aussi se servir ici avec avantage de la plu-

part des figures déjà employées, par là encore on repassera avec profit ce qu'on a déjà vu, et on fera une comparaison instructive de ces deux espèces de corps. Tout ce qui, dans ce chapitre, sera donc dit de la projection et de l'intersection des corps qui sont terminés par des surfaces planes, devra être envisagé en même temps comme une suite de ces chapitres, parce que quelque invraisemblable que cela puisse paraître de prime abord, il n'en est pas moins vrai qu'il est plus facile de passer de l'examen des corps à surfaces courbes à celui des corps à surfaces planes que de revenir de ces derniers sur les autres, ce que, du reste, la suite prouvera.

§ 193. — Soit *a b c d* (*fig.* 39), la vue d'un prisme régulier de 16 côtés, soit *ah d* la moitié de la base, (les côtés du polygone seraient les lignes *a* 1, 1.2, etc.), et soit A B C D la moitié du développement de ce prisme, (de telle manière que A D contienne 8 fois *a* 1), sur lequel les figures à projeter sur *abcd* sont représentées. En conséquence, on dessinera aussi bien sur A B C D que sur *abcd* le réseau de lignes. On observera dans le transport des figures dessinées de A B C D sur *abcd*, la voie prescrite dans le § 124, et on reliera après cela, non par des lignes courbes, mais par des lignes droites, les points correspondants obtenus par eux dans *abcd*. Il y a encore à observer si NOPQ est un octogone régulier ou si c'est un cercle; dans ce dernier cas, le points *n* et *β*, *β* et *o*, etc., doivent être joints, non par des lignes droites, mais par des lignes courbes, qui naturellement formeront une autre courbure, que ce n'a été le cas pour le cylindre, et formeront en même temps, à leurs points de jonctions, de brisures. Ces courbes seront, dans le cas du prisme, d'autant plus exactement déterminées, que l'on aura pu prendre les cordes sur le cercle égales à la distance des points intermédiaires, de manière qu'on aura plus besoin d'autre approximation entre la corde et l'arc. Enfin, il y a encore à remarquer que dans la représentation du prisme *abcd*, les perpendiculaires faites en 1, 2, 3...., doivent être des lignes pleines, parce qu'elles figurent là les projections des arêtes du prisme; le procédé reste en général le même, si le prisme est composé d'un plus ou moins grand nombre de côtés, ou si les figures à projeter

de la même manière ont d'autres formes s'écartant plus ou moins de celles dessinées en ABCD.

§ 194. — Si l'on se représente le trapèze *abcd* (*fig.* 40) comme étant la projection d'un prisme coupé obliquement, dont la base est un polygone régulier, de 12 côtés par exemple; on trouvera de nouveau son développement à l'aide du procédé indiqué au § 127, avec cette différence seulement que les lignes *ba'e* et *cd'g* doivent être représentées non sous forme de lignes courbes, mais sous forme de lignes brisées composées de 12 lignes droites.

Il y a encore à remarquer, premièrement, que dans la majorité de ces cas, on obtiendra ici un résultat plus exact que pour des cylindres; car, comme pour les prismes, il n'y a pas de lignes courbes à rectifier, on pourra alors faire la ligne *c'f* parfaitement égale au contour du prisme, et les lignes *ba'e* et *cd'g* seront le développement rigoureux des lignes d'intersection passant par *ab* et *cd*, puisque chaque portion de ces lignes doit être aussi longue que la portion correspondante du prisme.

Deuxièmement, plus la base du prisme est composée de côtés, plus le polygone se rapprochera du cercle, et les lignes brisées *ba'e* et *cd'g* différeront d'autant moins des lignes courbes représentées sur la figure.

Troisièmement, ce qui vient d'être dit relativement aux prismes réguliers, est aussi en général applicable à ceux dont les bases forment des polygones irréguliers.

§ 195. — On a fait voir dans le § 123 comment on parvient à représenter le développement d'un cône. Si maintenant la fig. 38 au lieu d'être un cône était une pyramide régulière, de 8 côtés par exemple; alors on tracera d'abord dans la fig. A les lignes *op*, *oc'* et *oq* comme figurant les arètes de la pyramide; en second lieu, on fera usage du procédé indiqué dans le § 123 pour la représentation de la surface développée, mais on reliera les points *a'* et *b'*, *b'* et *c'*, *c'* et *d'*.... de l'arc *a' a'* à l'aide de cordes; et en troisième lieu, on dessinera sur le plan du développement certaines figures, comme ici par exemple les courbes, que l'on transportera de nouveau à la surface de la pyramide; on devra alors faire usage du procédé

employé pour le tracé de la ligne spirale avec les modifications exigées ici, comme on le voit par la figure.

§ 196. — Si la fig. 44 n'était pas un cône, mais, au contraire, une pyramide, tronquée ou non tronquée, alors sa projection dans les fig. I, II, IV et V s'exécutera d'après les règles indiquées dans les § 131 à 133, avec cette remarque que dans toutes les figures on devra représenter les bases sous forme de polygones, comme cela a, par exemple, eu lieu dans la fig. II, et les arètes de la pyramide par les lignes pleines t C, DC, 2 C, comme dans la fig I, etc.

§ 197. — De même dans la fig. 46, si celle-ci est un prisme, on pourrra, avec un peu d'attention, facilement représenter par un polygone la base aussi bien que le plan d'intersection.

§ 198. — Si, enfin, les fig. 47, 48 et 57 au lieu d'être des cônes étaient des pyramides, alors les contours des plans d'intersection apparaîtront, non sous forme d'ellipses, d'hyperboles et de paraboles, mais bien sous forme de lignes brisées, dont la représentation sera facile à exécuter, d'après ce que nous avons dit précédemment à ce sujet, et comme ceci devient encore évident par l'inspection de la fig. 65, si l'on fait bien attention aux points désignés par les mêmes lettres. Il sera facile de voir que les points de jonctions *m*, *n*, se trouveront toujours situés sur les arètes correspondantes des pyramides.

§ 199. — On a indiqué dans le § 154 la voie par laquelle on trouve la projection de la ligne d'intersection de deux cylindres qui se coupent, aussi ne s'est-on pas préoccupé, dans les paragraphes suivants, de dire comment on devait agir lorsqu'un des deux corps est un prisme. Il reste donc encore à faire voir comment on représente la projection de la ligne d'intersection, lorsque les deux corps qui se coupent sont des prismes.

Si l'on admet que ABCD (*fig.* 52 1) forme avec la base A I A' (*fig.* II) un prisme à trois faces, et que E F G H forme avec la base *n m l n'* (*fig.* III) un prisme de quatre côtés, alors les lignes droites LR et RM indiqueront la projection des lignes d'intersections dans la fig. 1, *l* 2 et *l* 2', celles des mêmes lignes d'intersection dans la fig. II, et les lignes *m n*, *n l*, *l n*, et *n' m*, les lignes d'intersection dans la fig. III, comme cela est facile à démontrer. Il sera tout aussi facile de trouver cette

ligne d'intersection dans la fig. V qui est inclinée, que si cette intersection se composait de lignes droites.

Si ABCD est la moitié d'un prisme régulier à huit faces, dans ce cas, les lignes LR et RM consisteront chacune en deux lignes droites, dont les points de jonction sur les arêtes correspondantes du prisme sont faciles à trouver d'après la fig. II et III.

Supposons que la base du prisme EFGH, au lieu d'être un carré *mnln'* (*fig.* III), soit un octogone, alors la construction convenable pour représenter la ligne d'intersection dans la fig. I sera faite suivant la règle donnée sur les cylindres. La ligne d'intersection se montrera, dans ce cas, ainsi qu'elle a été représentée dans la fig. 64 par *dcbabcd*, d'où on verra comment on trouve les projections des lignes d'intersection des prismes à bases différentes.

§ 200. — Ce qui vient d'être dit pour la fig. 52 est aussi applicable à la fig. 53, si ABCD et EFGH au lieu d'être des cylindres étaient des prismes. La ligne d'intersection de la fig. I, qui se produit alors et qui se compose de la réunion des quatre lignes droites TV, V*b*, *b*V' et V'T, sera trouvée avec les fig. II et III, dans la supposition toujours qu'il est question ici de prismes à 4 faces avec les bases ATBL' (*fig.* II) et M*q* *lq'* (*fig.* III). Si au contraire les bases, au lieu d'être des carrés, étaient des polygones quelconques, alors on suivra la voie indiquée pour les cylindres pour obtenir dans la fig. I la projection de la ligne d'intersection, qui sera de nouveau composée de lignes droites, dont les points de jonction se trouveront en parties sur les arêtes correspondantes des prismes, tels que les points *b* et *d* de la fig. 64, et en partie sur les côtés eux-mêmes tels que les points *a* et *c*.

§ 201. — Quant à la fig. 54, où il s'agit de deux prismes droits égaux, mais qui se coupent obliquement, alors la fig. A ne subit de modification qu'autant qu'on a à indiquer dans celle-ci les arêtes des prismes à l'aide de lignes tracées en plein, puisqu'il sera évident que, dans ce cas aussi, la projection des lignes d'intersection dans la figure en question doivent apparaître sous forme de lignes droites *il* et *mk*. Dans les fig. B, C, D, et E, au contraire, les ellipses et les cercles par lesquels sont représentées les lignes d'intersection des corps, aussi bien que

les bases des cylindres, sont complètement supprimés et sont remplacés en partie par des polygones réguliers, en partie par des polygones irréguliers, dont le nombre des côtés et la position dépendent de la forme et de la position des prismes. La construction exigée pour cela est, en général, conforme à celle qui a été indiquée dans le § 164, à l'occasion de cylindres qui se coupent, et il va sans dire qu'il faut en outre faire attention ici à toutes les modifications que les formes des prismes peuvent apporter.

§ 202. — Dans le § 167 on a fait voir comment dans la fig. 55 on trouve les lignes d'intersection, lorsqu'un prisme triangulaire A B C D, dont la base est A *b* A', vient à être coupé par un cylindre oblique E F G H; si maintenant l'on admet que E F G H soit aussi un prisme, de 12 côtés par exemple, alors la projection de la ligne d'intersection des deux prismes apparaîtra sous forme d'une ligne brisée L U M (*fig.* 1), et de telle sorte que leurs points de jonction se trouveront sur les arêtes correspondantes du prisme. C'est parce qu'elle se compose d'intersections de plans que cette ligne d'intersection doit se montrer sous forme d'une ligne brisée.

§ 203. — Lorsqu'un prisme à quatre faces A B C D (*fig.* 56 I) est coupé par un cône E F G, on trouve par les indications du § 169 la projection de la ligne d'intersection des deux corps qui apparait sous la forme de la ligne courbe I V K. Si maintenant E F G était une pyramide, de huit côtés par exemple, alors il faudra diviser en quatre parties le demi-cercle dessiné sous H H' (*fig.* II), élever de ces points de partage des perpendiculaires sur H H' et relier ces points ainsi obtenus avec le sommet E à l'aide de lignes droites. Par là seront figurées les arêtes de la pyramide. On projette après cela dans la fig. I sur les arêtes réelles de la pyramide les points où ces arêtes coupent le contour du prisme dans la fig. II, et l'on relie ces points par une ligne brisée qui se distinguera comme telle de la ligne courbe I V K trouvée dans la fig. I.

Ajoutons un exemple pour rendre plus évident ce qui vient d'être dit.

§ 204. — *Problème.* — Un prisme *a b c d* (*fig.* 65, A) droit régulier à huit faces est traversé par une pyramide droite *e f g*

aussi régulière à 12 faces ; trouver la projection des lignes d'intersection des deux surfaces.

Solution. — On dessine les vues latérales (*fig.* B) des deux corps et des points *o*, *q*, *s* et *m* où les arètes *cp*, *et*, *eu* et *ef* de la pyramide *pep* (*fig.* B) sont coupées par le contour *izmw* de la base du prisme ou même des lignes horizontales que l'on prolonge dans la fig. A, jusqu'à ce qu'elles coupent les arètes correspondantes de la pyramide *efg* (*fig.* A) dans les points m, *s*, *q*, *o*, *q*, *s* et *l*. Après quoi on tire dans la fig. B, par le sommet *e* et par les points r et r du polygone *izmw* les lignes droites *ev* et *er*, on fera *uv* (*fig.* A) = *uv* (*fig.* B), ensuite on reliera aussi dans la fig. A les points *e* et r par des lignes droites et l'on remarque les points *r* et *r*, où l'arète *hh* du prisme est coupée par ces lignes. Enfin, on relie, comme on peut le voir par la fig. A, ces points et ceux trouvés en premier lieu par des lignes droites, alors la ligne brisée *msrqoqrsl* donnera la projection de la ligne d'intersection demandée. On trouvera de même la ligne d'intersection brisée supérieure *ink*, dans laquelle la pyramide abandonne de nouveau le prisme.

La justesse du procédé sera facile à saisir si l'on se représente le plan de projection de la fig. B rabattu autour de *xy* assez pour qu'il forme avec le plan de projection de la fig. A un angle droit et si on fait attention aux points d'intersection et arètes désignés de la même manière. Conséquemment *mr* (*fig.* B) apparaîtra comme la projection de la partie *msr* (*fig.* A), et *ro* (*fig.* B) comme la projection de la portion *rqo* (*fig.* A).

§ 205. — La voie indiquée ici suffira aussi pour obtenir dans la fig. 57 les projections des lignes d'intersection dans les fig. I, II et III, si l'on considère cette intersection comme étant les lignes de contact d'un prisme avec une pyramide, ou un cône, ou enfin d'un cylindre avec une pyramide, et surtout si l'on se sert encore de ce qui a été dit dans les paragraphes concernant les cylindres et les cônes.

§ 206. — Si l'on se représente que les sphères dans les fig. 59 et 60 au lieu d'être coupées par des cylindres l'étaient par des prismes, et si l'on voulait trouver dans la fig. I les projections des lignes d'intersection, alors on tracera dans la fig. II, au lieu des cercles *nqmq'* (*fig.* 59) et *oqN'q'* (*fig.* 60),

les bases des prismes traversants, et on placera dans cette figure les demi-cercles concentriques menés des points *o* et *o* comme centres, de telles sortes qu'ils passent par les sommets des angles du polygone. Ces points sont alors projetés dans la fig. I sur la ligne horizontale correspondante. Mais pour pouvoir trouver plus exactement encore les lignes d'intersection qui se composent de plusieurs lignes courbes et qui formeront dans leurs points jonction des brisures, il sera nécessaire de prendre encore quelques points sur les côtés du polygone de la fig. II, de mener de nouveau par ces points des demi-cercles concentriques, de représenter dans la fig. I leur projection par des lignes droites, et d'indiquer sur elles la projection des points que l'on vient de prendre.

On agira de même pour la représentation de la fig. III (*fig.* 59) et des fig. III et V (*fig.* 60).

§ 207. — Pour trouver enfin les projections des lignes d'intersection des sphères par des pyramides, comme ce serait le cas si l'on se représentait le cône EFG (*fig.* 61) comme étant une pyramide d'un nombre quelconque de côtés, on suivra en général la même voie qui a été indiquée dans le § 183 pour la sphère et le cône; ensuite on fera passer dans la fig. I parallèlement au plan de projection horizontale plusieurs plans d'intersection qui apparaitront dans la fig. I sous forme de lignes droites, dont un a été indiqué ici par la ligne *qq*, et on dessinera dans la fig. II les projections de ces plans d'intersection qui se montreront là sous forme de cercle, au cas où ils passent par la sphère, et sous forme de polygones semblables, au cas où ils passent par la pyramide, comme, par exemple, la coupe passant par *qq* dans la fig. II, apparaîtrait sous forme d'un cercle ayant le diamètre $q'r'$, et sous forme d'un polygone égal à la base de la pyramide ayant pour diamètre $s'q'$. Maintenant les points dans lesquels le polygone est chaque fois coupé par le cercle, se trouveront placés dans la fig. II sur la projection de la ligne d'intersection des deux corps, et si on projette ces points dans la fig. I sur les lignes droites qui leur correspondent, alors ils déterminent dans cette projection la projection de la ligne d'intersection, comme c'était par exemple le cas pour le cône avec les points p' et p.

Il va sans dire que, premièrement, les lignes d'intersection supérieures sont trouvées à l'aide de la même construction que pour les deux lignes d'intersection de la fig. III, et que, en deuxième lieu, on aurait également pu (d'après le § 185) faire passer le plan d'intersection parallèlement au plan de projection verticale (comme par exemple I L, *fig.* II), pour trouver dans ces figures les projections des lignes d'intersection.

§ 208. — En résumant, tout ce qui a été dit dans ce chapitre des différents moyens de projeter des lignes d'intersection des corps qui se coupent et qui sont limités par des surfaces planes, il en résultera, qu'en générale, il s'agit principalement d'indiquer, tant pour ces lignes que pour les corps limités par des surfaces courbes, *un nombre de plans d'intersection parallèles entre eux, lesquels passent par la surface des deux corps qui se coupent, et coupent en même temps leurs lignes d'intersection.* Si d'après cela on reporte la projection d'un plan d'intersection ainsi mené, d'une figure dans une autre, elle consistera alors, dans le cas en question, en deux polygones dont le nombre et la forme des côtés se déterminent par les formes des corps qui s'entrecoupent. Ces deux polygones se couperont donc en deux points, et comme ces points d'intersection sont communs aux deux surfaces, ils se trouveront donc nécessairement situés dans les lignes d'intersection. Commo, d'autre part, ce procédé étant employé pour trois plans d'intersection, produira le même résultat, on obtiendra alors par l'emploi successif de cedit procédé un système de points qui (attendu qu'il s'agit ici de corps à surfaces planes), représentera, à l'aide de lignes droites reliées entre elles, leurs lignes d'intersection demandées. Il faut naturellement que, dans le choix de ces plans auxiliaires, on tienne compte de la position et de la forme des corps qui se coupent; comme aussi d'autre part la construction sera rendue plus facile, si l'on place ces plans parallèlement avec un des plans coordonnés, c'est-à-dire au plan vertical ou au plan horizontal. On ne peut pas, en général, déterminer la position qu'il faut donner à un plan auxiliaire ni en fixer le nombre, et surtout la distance de l'un à l'autre. Ceci dépend trop des circonstances, et en général de la nature des corps qui se coupent,

et il faut laisser au jugement du dessinateur le soin de les choisir. Il est toutefois toujours nécessaire qu'il porte spécialement toute son attention à donner à ces plans une position dans laquelle leur projection puisse être construite de la manière la plus simple et la plus facile, attendu que par ce moyen le travail est beaucoup abrégé.

Il a déjà été fait mention de tout cela lorsqu'on a traité de l'intersection des corps limités par des surfaces courbes; si l'on en a parlé de nouveau, c'est que cela nous procure encore l'occasion de rappeler que ce qui avait déjà été dit des intersections de ces corps courbes, trouve aussi son application pour les surfaces planes.

Si en finissant ce chapitre on peut considérer les études sur la projection comme terminées; il s'en faut cependant qu'elles soient épuisées. C'est à la géométrie descriptive qu'il appartient de donner à ce sujet plus de développement, et il est facile de comprendre que le nombre des problèmes qui appartiennent à ce sujet est très considérable. Toutefois, ce que nous avons exposé suffit au but que nous avons eu en vue, et doit être envisagé comme une indication suffisante pour arriver à une solution des problèmes qui s'offrent dans la pratique. Un commençant acquerra les connaissances requises et parviendra en même temps à obtenir une habileté indispensable à exécuter un dessin géométrique qui réponde à ce but, s'il étudie les problèmes que nous avons proposés, s'il s'applique à dessiner souvent lui-même les figures qui s'y rapportent, et s'il cherche souvent aussi à reproduire ces mêmes figures sous des formes et dans des positions différentes.

Ajoutons encore que dans la troisième partie de cet ouvrage qui traite de la construction des ombres et des parties éclairées d'un dessin, il sera parlé encore de plusieurs cas qui peuvent appartenir ici, et par suite cette étude pourra être envisagée comme étant un complément de celles de la projection.

CHAPITRE VI.

Du tracé des échelles, de leur emploi, et de la manière de dessiner d'après plusieurs échelles.

§ 209. — Le mètre étant pris pour mesure d'unité, se divise en décimètres, centimètres, millimètres qui sont les dixièmes, centièmes, millièmes parties du mètre. Il ne sera question par suite, pour la construction des échelles, que de cette unité de mesure.

L'instrument sur lequel est tracée une certaine mesure de longueur avec ses subdivisions, qui servent à faire connaître les différentes longueurs des lignes que l'on mesure, se nomme une *échelle*. Elle sert aussi bien à rapporter sur un dessin des longueurs déterminées, qu'à évaluer celles d'un dessin exécuté.

§ 210. — Comme on dessine le plus souvent les objets sous des dimensions plus petites qu'ils ne sont réellement, tout en conservant dans l'ensemble les proportions et les formes des diverses parties, il s'ensuit que l'échelle devra subir la même réduction : cela s'appelle *réduire l'échelle*. Si l'objet à figurer était projeté sur un plan dans sa véritable grandeur, sa réduction à une échelle moindre conservera la même forme et sera en tout semblable à l'objet lui-même, c'est-à-dire que les lignes suivront la même direction que les projections de la véritable grandeur, et quant à la surface, elles seront dans le rapport du carré de ces échelles.

Au cas où il s'agirait de tenir compte de combien l'échelle réduite est plus petite par rapport à la grandeur réelle, il sera

nécessaire de bien déterminer cette échelle dans le but qu'on se propose, car elle servira de mesure à tout le dessin. Dans ce cas, il faut surtout faire attention que l'échelle soit dans un rapport convenable avec le dessin, c'est-à-dire qu'elle ne soit pas trop grande, cas où le dessin prendrait trop de développement; ni trop petite, ce qui empêcherait de représenter avec netteté et exactitude les diverses parties du dessin.

§ 211. — D'après cela, on ne peut donner d'une manière générale une règle à suivre pour cette réduction. Elle doit être laissée au choix du dessinateur, attendu que sa grandeur dépend essentiellement du développement de l'objet à figurer et en même temps de la grandeur du papier. Il est, en effet, facile de voir que la grandeur de l'échelle est dans un rapport direct avec celle du papier, tandis qu'elle est dans un rapport indirect avec celle de l'objet à dessiner, parce que l'échelle doit être d'autant plus courte que l'objet à représenter a des dimensions plus grandes et réciproquement; il ne s'agirait donc : que de relever la plus grande dimension de cet objet, de tracer sur le papier sur lequel le dessin doit être fait, une ligne droite qui servira en même temps de base, et partager celle-ci en autant de parties égales qu'il s'en trouve dans l'objet que l'on mesure, des mètres, par exemple. L'une de ces parties représenterait alors la grandeur d'un mètre de l'échelle réduite. Par ce moyen, on obtiendrait, il est vrai, pour chaque objet, la réduction la plus convenable; toutefois, il est encore nécessaire de faire attention au choix de l'échelle par rapport aux autres dessins qu'on a encore à représenter sur la feuille, car si ceux-ci devenaient trop grands, il faudrait réduire leur échelle pour rester dans les limites du papier. Aussi, quand on aura représenté les plans et élévations d'un bâtiment tout entier, on se servira d'une échelle plus petite que celle que l'on emploiera pour les détails, de même que pour les machines, engrenages et autres objets de ce genre.

§ 212. — Pour les cas indiqués en dernier lieu, il suffit en général de donner au mètre de l'échelle réduite la longueur de 10 à 15 centimètres. Ainsi, si l'échelle est à 10 centimètres pour mètre, les dimensions du dessin qui auront 10 centimètres représenteront 1 mètre. Malgré cette réduction de l'échelle,

on est cependant à même, dans le plus grand nombre des cas, de figurer nettement et exactement les parties les plus petites. Par là, le dessin obtient une forme agréable et une étendue que l'œil peut embrasser plus commodément.

Quoique, au premier aspect, cette différence 10 et 15 centimètres paraisse minime, elle devient énorme pour les surfaces, puisque celles-ci augmentent en raison du carré des côtés. Ainsi, à une échelle de 10 centimètres, la surface d'un mètre sera égale à 1 décimètre carré, et dans le cas de 15 centimètres, elle sera égale à 2 décimètres 25, ce qui fait plus du double.

On peut, selon les circonstances, adopter pour 1 mètre de l'échelle réduite, deux, trois et quatre décimètres, et même davantage; mais alors les mesures de la longueur de l'objet seront dans le dessin de $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{2}{5}$ et les surfaces de $\frac{1}{25}$, $\frac{9}{100}$, $\frac{4}{25}$, aussi grand que celles de l'objet.

Mais on se sert rarement d'une échelle aussi grande; ce ne serait que dans le cas où l'on aurait à donner aux ouvriers le modèle exact et rigoureux d'après lequel ils sont obligés de travailler; mais alors encore, il serait plus convenable de leur donner de suite les véritables mesures, sans réduction, si cela est possible.

§ 213.—Pour tracer une échelle sur laquelle on puisse prendre, avec le plus d'exactitude possible, non seulement le mètre, mais aussi les décimètres, les centimètres et les millimètres, le rapport de la réduction ne doit pas être trop petit, car on ne pourrait exécuter sur l'échelle les divisions avec la rigueur nécessaire. Or, voici un moyen d'obtenir une échelle avec les plus petites divisions possibles, sans que la netteté de cette division en souffre.

On trace une ligne droite ab (*fig.* 66) avec une ouverture du compas égale à 1 centimètre, ou avec toute autre mesure convenable, on fait $aO = OI = I\,II = II\,III$ (ici on a pris pour mesure aO). Sur une de ces perpendiculaires, on prend une distance $bc = ao$ que l'on divise en dix parties égales, ainsi $bh = hi = ik$, etc.; par ces points de division, on mène des parallèles à ab. On divise de même ao en dix parties égales et gf en dix parties égales; on joint le premier point de division I

de *gf* avec le point de départ 0 de *ao*, par une oblique 1, 0; joignant ensuite deux à deux les points de division faits sur *gf* avec ceux de *a o*, on obtiendra ainsi un système d'obliques parallèles qui couperont le système de lignes passant par les points *b h i* K, etc., toutes parallèles à *ab*. Enfin, on mettra aux points de division sur les lignes *ao* et *of* les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, en partant du point 0. Ces points de division représenteront autant de millimètres.

§ 214. — On se sert de cette échelle de la manière suivante. Si, par exemple, on veut prendre 3 centimètres 2 millimètres 8 dix millimètres, on porte une pointe de compas sur le point 8 de la ligne *bc*, et l'autre sur le point qui se trouve à l'intersection des deux droites 2, 2 du système de lignes obliques, et 8, 8 du système parallèle à *ab*. Cette ouverture de compas représentera la dimension cherchée, car la ligne 8, 8 représente 3 centimètres, la portion de ligne *vy* représentera 2 millimètres, puisqu'elle est égale aux deux millimètres de la division *oa*; il ne reste plus qu'à justifier les 8 dix millimètres représentés par la portion de ligne *v* 8. En effet, en considérant le triangle rectangle 0 *f* 1 qui est divisé à distances égales par les lignes transversales 1, 2, 3, 4, *v*.... on voit que si la base 1 *f* est égale à $^{10}/_{10}$ ou 1 millimètre comme on l'a pris en effet, la portion 9 *u* sera égale à $^{9}/_{10}$, 8 $v = \frac{8}{10}$ 7 $w = \frac{7}{10}$, etc., ainsi de suite jusqu'à zéro. Donc 8 *v* égale $\frac{8}{10}$ de 1 *f* ou d'un millimètre. On a donc pris ainsi la mesure totale demandée.

§ 215. — Mais pour se convaincre de la confection exacte de l'échelle faite d'après les indications du § 213, on prend avec un compas la longueur de différentes diagonales de cette échelle, et l'on voit si ces lignes ont toutes la même longueur, ce qui doit avoir lieu dans une échelle bonne. Si on prend par exemple dans la fig. 66 la diagonale *af*, on vérifiera si celle-ci correspond exactement à la distance de *f* à 1, de I à *d*, de *d* à *b*, de *c* à II, etc. On s'assurera, d'autre part, si les diagonales des petits parallélogrammes, qui sont les divisions du grand parallélogramme II *g* 1 *o*, sont partout égales, c'est-à-dire si, par exemple, l'étendue *uy* s'adapte aussi aux autres, et si enfin 9 *w* = aussi δρ, etc.

§ 216. — On peut tracer l'échelle réduite soit au bas de la

feuille de papier et dans un lieu convenable, soit sur une bande de papier que l'on a collée dans ce but sur une planchette très mince faite d'un bon bois bien sec ; c'est à ce dernier moyen qu'il faut accorder la préférence dans la pratique, à cause de sa grande commodité : il ne s'agit plus alors que de faire concorder le plus exactement possible, l'échelle que l'on a tracée sous le dessin achevé avec celle sur laquelle on a pris les mesures, attendu que la plus petite erreur amènerait des grandes différences dans les résultats. On évitera en tout état de cause ces erreurs si, dès le principe on exécute le dessin d'après l'échelle qui doit se trouver au-dessous de lui. Toutefois, on ne devra se permettre une semblable manière de faire que lorsqu'il s'agit d'un dessin composé de fort peu de lignes et de peu de mesures à prendre, attendu que, pour un dessin compliqué, cette échelle serait par trop percée de points de compas et serait rendue impropre à servir plus tard.

Disons enfin que l'échelle qui servira à exécuter un dessin (que l'on ait préparé d'ailleurs cette échelle d'une manière ou de l'autre), après qu'elle aura été tracée le plus exactement et le plus correctement possible au crayon, devra être passée à l'encre de Chine, attendu que les lignes tracées au crayon s'effacent facilement et ne donnent pas des intersections aussi correctes que lorsqu'on trace ces lignes à l'encre de Chine. Le tracé correct et exact des échelles est en général, pour des commençants, une opération plus difficile qu'on ne le pense, et suppose déjà une certaine pratique du dessin. Il est très important de ne pas oublier de tracer l'échelle au bas d'un dessin qui doit servir aux arts ou à l'industrie. Et quoique les dimensions soient marquées sur ces dessins par des chiffres, il n'en faut pas moins tracer cette échelle, elle devra même se trouver au-dessous de tous les dessins destinés à l'enseignement.

§ 217. La longueur de l'échelle, c'est-à-dire le nombre de mètres que l'on porte sur la ligne *ab* de la fig. 66, est à la vérité tout-à-fait indifférente, cependant il faut qu'elle soit en rapport soit avec l'espace libre laissé sur le papier pour le tracé de cette échelle, soit avec l'étendue de l'objet que l'on

doit dessiner. En tout état de cause, pour arriver à une division exacte de cette échelle, on fera mieux de prendre toute la longueur de l'échelle sur un mètre bien exact, puis de diviser celle-ci en autant de parties qu'elle renferme d'unités de mesures. Si, par exemple, on veut établir une échelle à 2 centimètres pour mètre, on tracera une ligne de 20 centimètres de longueur, par exemple, et on la divisera en 10 parties égales. Chacune de ces parties représentera un mètre, et ce moyen sera plus exact que si l'on avait porté avec le compas 10 fois 2 centimètres sur la ligne.

§ 219. — Si le rapport de la réduction est tellement petit que l'on ne puisse établir avec avantage l'échelle décrite dans le § 213, comme cela arrive ordinairement pour les plans, coupes et élévations d'architecture, on se contentera alors de l'échelle réduite ordinaire, telle qu'on la trouve en général faite sur les dessins des bâtiments, échelle qui ne se compose que d'une ligne droite sur laquelle on marque les mètres et ses divisions, et ainsi qu'on le voit représenté par la ligne *a b* (*fig.* 67). Pour mieux faire voir encore la division, on élèvera sur tous les points de partage des petites perpendiculaires, et l'on marquera en alternant, en partie au-dessus et en partie au-dessous de la ligne *a b*, des lignes plus fortes. Dans une division aussi petite il sera difficile de marquer chaque subdivision, on se contentera alors de les marquer de deux en deux. Une pareille échelle aura alors la forme de la fig. 67, seulement il faudra remarquer que cette figure n'est qu'un modèle que l'on est libre d'imiter ou non, cela dépend de la volonté et du jugement du dessinateur qui peut choisir toute autre division ou un autre mode de représentation de cette échelle, pourvu qu'il puisse atteindre le but proposé, c'est-à-dire qu'il puisse, le plus exactement et le plus commodément possible, prendre sur celle-ci les mesures dont il a besoin.

§ 220. — Lorsqu'il s'agit de dessiner un objet technologique, on se le représente ordinairement dans la position la plus commode, soit au-dessus, soit au-devant d'un plan de projection, de telle sorte que celui-ci soit parallèle à sa vue principale. Cette vue une fois dessinée, s'il est encore nécessaire

d'obtenir d'autres vues du même objet, on lui donnera en conséquence la position la plus commode pour tracer d'autres projections dans lesquelles se trouveront dessinés tout ce qui frappe l'œil directement (§ 62); on parviendra à l'aide de ces projections à obtenir le plan vertical ou horizontal, ou les coupes de cet objet, selon que l'on se propose de représenter une de ces vues ou toutes à la fois.

Chaque projection de ce genre ne donne jamais que l'image de l'objet vu d'un seul côté, à moins que l'objet à figurer soit placé dans une position oblique, ou bien que ses faces se joignent à angles obtus, dans lesquels cas, en même temps qu'on voit un côté, on peut voir un autre ou partie de celui-ci. Ce serait, par exemple, le cas quand il s'agirait de dessiner la projection verticale d'un objet de cinq ou un plus grand nombre de faces dont la base serait en polygone régulier, et si l'on donnait à une des faces latérales de ce corps une position parallèle au plan de projection verticale.

Si, au contraire, les surfaces des côtés se joignent à angle droit, il sera alors évident que, dans la position décrite, plus haut, ce corps ne sera jamais figuré que d'un seul côté, et que par suite chaque projection ne donnera l'image que d'une seule face de ce corps. Aussi, ce genre de représentation suffit-il pour les dessins technologiques les plus nombreux et les plus ordinaires. Dans le plus grand nombre de cas, on pourra aussi très facilement réunir par l'imagination les vues partielles pour se représenter par là la vue générale de l'objet. Toutefois, il ne faut pas oublier que, premièrement, il se présente fréquemment des cas où on est involontairement forcé de représenter des surfaces qui ne soient ni parallèles, ni perpendiculaires à un plan de projection, même lorsque les faces principales sont parallèles à ce plan (comme ce serait, par exemple, le cas si certaines parties de l'objet avaient les unes par rapport aux autres une position oblique), et qu'en second lieu, on choisit à dessein une position inclinée de telle sorte qu'on voie plusieurs parties de l'objet à la fois, surtout lorsqu'il s'agit d'un corps inconnu ou composé d'un grand nombre de parties, par exemple, une machine. Il sera alors intéressant de connaître les règles à l'aide desquelles on parviendra à faci-

liter une représentation de ce genre et la voie par laquelle on arrivera le plus promptement au but.

§ 221. — Si l'on voulait donc représenter, d'après les principes énoncés, la projection verticale d'un corps, de telle sorte que l'on obtienne dans cette projection l'image de deux ou plusieurs côtés; il faudra que cet objet soit figuré dans une position inclinée par rapport au plan de projection, et que dans ce but la projection horizontale soit dessinée, avec une inclinaison correspondante vers la ligne de terre. C'est alors seulement qu'on est à même de terminer la projection demandée, comme cela est visible par les nombreuses figures parcourues. Quelque exacte et conforme que soit d'ailleurs cette méthode de représentation aux principes de la géométrie descriptive, elle offre les inconvénients suivants qui rendent son application plus difficile, malgré les avantages qu'elle offre dans quelques circonstances.

Premièrement, on est forcé d'employer plusieurs dessins auxiliaires pour figurer un objet incliné vers le plan de projection, dessins qui n'ont d'autre but que de déterminer ladite projection. Si l'on veut donc représenter dans un dessin plusieurs côtés à la fois de la projection, comme cela a eu lieu, par exemple, pour les corps de la fig. 23 et en particulier dans la fig. P, il faudra commencer par tracer la projection verticale de ces corps, fig. 23 M, dans une position parallèle avec le plan de projection, chercher la projection horizontale fig. N, puis transporter celle-ci dans la fig. O au-dessous de la ligne de terre, avec l'inclinaison que l'objet doit avoir sur le plan vertical, et enfin trouver par ce plan horizontal fig. O, et ce plan vertical fig. M, la projection demandée fig. P en suivant la voie indiquée. Non seulement ce mode d'opérer exige beaucoup de temps, mais est aussi fatigant et d'autant plus compliqué que le sera la forme de l'objet qu'on doit figurer.

Le résultat avantageux qu'on attend n'est souvent pas en rapport avec la peine qu'on se donne, et d'autant moins qu'on est forcé d'exécuter d'abord deux vues de l'objet, une projection verticale et horizontale, et qu'alors, pour terminer les autres projections qui manquent, on pourrait y arriver par

due de la feuille de papier et de la planche nécessaire, et à un procédé plus simple, sans tracer une seconde projection horizontale.

Secondement, par une représentation de ce genre, on perdrait une partie, un des buts essentiels du dessin géométrique; car, dans cette représentation, les hauteurs seules ne sont pas altérées, mais les dimensions en longueur et largeur sont plus ou moins raccourcies, et de cette façon, le dessin ne donnera ni les distances véritables dans ces deux sens, ni les vrais rapports des parties avec l'ensemble et entre elles, ce qu'il est très essentiel de voir dans des dessins techniques.

Troisièmement, une représentation de ce genre n'est vraiment exécutable que pour des objets d'une très petite étendue; les difficultés pour l'exécution seront poussées jusqu'à l'impossibilité lorsqu'il s'agira de faire un dessin qui occupe un espace assez considérable; car les dessins auxiliaires qui doivent trouver place sur la même feuille que le dessin lui-même, ainsi que le tracé des longues lignes horizontales et verticales exigées, mettent des obstacles presque insurmontables dans l'exécution du dessin.

Un exemple justifiera de la manière la plus évidente cette assertion : on veut représenter, à l'aide d'un dessin géométrique, la projection verticale d'une machine à vapeur, de telle sorte qu'aucune face principale de cette machine soit parallèle avec la surface du plan, et que par suite de cette inclinaison de l'objet à figurer, on obtienne à la fois deux projections *dans un seul et même dessin*, il faudrait donc suivre la longue chaîne de procédés indiqués plus haut pour obtenir la vue de la machine à vapeur dans l'inclinaison qui s'accorde avec la direction représentée fig. 23, en P. Si on réfléchit maintenant, qu'en tout il faut dessiner deux plans verticaux et deux plans horizontaux, dont l'un des derniers doit être incliné sous un certain angle vers la ligne de terre; qu'on a à dessiner ces quatre vues sur une seule feuille, et que chacune prend déjà pour elle-même un espace considérable, vu que l'échelle à employer ne doit pas être trop petite pour que la représentation soit bien nette; alors on verra suffisamment que, lors même qu'on voudrait objecter la difficulté sur l'exactitude, le dessin deviendrait pratiquement inexécutable, à cause de la trop grande éten-

cause de la longueur des lignes verticales ou horizontales qu'il faudrait tirer pour la représentation de la fig. 23 P, de la fig. M, et fig. O. Il est impossible de dessiner sur une planche d'une étendue aussi grande, la position du corps serait trop fatigante malgré les dispositions qu'on prendrait pour faciliter le travail.

En tenant donc compte de ces difficultés, on donnera la préférence au dessin obtenu sur des plans parallèles à leurs faces et on s'efforcera d'obtenir, en les réunissant par la pensée, une représentation la plus exacte possible du corps, quelque compliqué qu'il soit. Avec ces dessins, on renoncera aux avantages d'une seule projection d'ensemble et on en sera dédommagé par les mesures et les rapports exacts des parties entre elles que l'on peut obtenir d'une manière très simple d'après ces dessins.

§ 222. — Par conséquent, il s'agira d'indiquer un procédé à l'aide duquel on obvie à ces inconvénients, c'est-à-dire qu'on soit mis à même de projeter immédiatement sur une surface les objets qui ont une position inclinée vers celle-ci, sans être obligé d'avoir recours aux dessins auxiliaires en question, et qu'en second lieu, on puisse aussi trouver, à l'aide du compas et de l'échelle, les dimensions des lignes qui sont vues en raccourci dans la figure, comme cela a lieu pour celles qui sont vues dans leur projection parallèle.

Si l'on réfléchit maintenant que pour les dessins dans lesquels les objets ne sont pas représentés dans une position parallèle à leur plan de projection (lorsque, par exemple, dans la représentation du plan vertical, le plan horizontal n'a pas une position parallèle à la ligne de terre, mais au contraire, forme avec celle-ci un angle aigu, les distances sont, dans le sens de la hauteur, dans une grandeur réelle; celles dans le sens de la largeur, au contraire, raccourcies (*voyez* § 95, *fig.* 21), et que ce raccourcissement dépend de l'angle d'inclinaison vers la ligne de terre, il faudra alors trouver, outre l'échelle qui sert au transport des mesures de hauteur, *une autre échelle qui soit dans un rapport déterminé avec cet angle d'inclinaison et qui convienne pour le transport des mesures dans le sens de la longueur et de la largeur*. Le mode d'agir consiste alors en ce qu'on exécute les dessins de ce genre non d'après une seule échelle, mais d'a-

près plusieurs échelles proportionnelles dont les rapports doivent être déterminés d'avance, comme on va l'expliquer dans le paragraphe suivant.

§ 223. — Soit donc maintenant *ag* (*fig.* 68) le plan vertical, *a' b' e' d'* le plan horizontal d'un parallélipipède qui forme une inclinaison de 45 degrés vers la ligne de terre *xy*; soit, d'autre part, *ae* la hauteur égale à la largeur *a' b'* = 3 mètres, la longeur *b' e'* = 5 mètres, il sera alors évident que, si des points de partage de la ligne *a' b'* et *b' c'* on élève des perpendiculaires vers le plan de projection verticale, la ligne *ab* sera alors partagée en trois parties égales, et la ligne *be* également en cinq parties égales, et que les portions des deux lignes doivent être égales entre elles auprès de l'angle d'inclinaison de 45 degrés. Comme maintenant les longueurs qui en résultent pour la ligne *ab* se comporteront aux portions de la ligne *a' b'*, comme la ligne *bo* avec la ligne *b'o'*, ou bien comme *p'o'* avec *b' o'*, et comme *o'p'b'* est un triangle rectangle isocèle, alors chaque partie de la ligne *ab* se comportera à l'égard de la ligne *a'b'* comme le côté du carré avec la diagonale. Comme d'autre part, avec cette inclinaison, l'angle *c d' c'* doit être égal à l'angle *ad'a'*, il est clair que les portions de la ligne *bc* devront être avec les portions de la ligne *b'e* dans le même rapport, de même que *p'q'* avec *b'q*.

S'il s'agit donc de dessiner le plan vertical d'un parallélipipède avec les mesures données, tel qu'il ait comme ici, vers le plan de projection, une inclinaison de 45 degrés, et si l'échelle pour la mesure des hauteurs est donnée, alors on prend une des portions de cette échelle, par exemple, un mètre, comme étant la diagonale d'un carré que l'on construira en suivant la voie connue, et l'on adopte, pour la mesure des longueurs et largeurs, ce côté comme étant un mètre de la nouvelle échelle ; après quoi, on obtient la longueur donnée *bc*, ainsi que la largeur *ab* d'après la nouvelle échelle ; mais la hauteur *ae*, au contraire, d'après la diagonale; et on obtient ainsi immédiatement la projection du corps incliné vers le plan vertical, sans dessiner d'abord le plan horizontal; il en résulte aussi le grand avantage qu'on peut réciproquement prendre, avec une seule mesure sur la nouvelle échelle, les distances des li-

gnes *ab* et *dc* vues en raccourci (comme cela a lieu pour un dessin qui représente un objet dans une position parallèle avec son plan de projection). Si le corps à représenter n'est pas d'une forme aussi simple que celui figuré ici, le procédé ici décrit restera néanmoins applicable pour la représentation de ces quelques lignes et aussi pour les autres lignes horizontales et verticales quel que soit leur nombre, pourvu que toujours les mesures de celles-ci soient connues.

§ 224. — Mais si le parallélipipède *ag* avait, comme dans la fig. 69, une inclinaison vers le plan de projection verticale telle que la ligne *a' d'* du plan horizontal forme, par exemple, un angle de 60 degrés et la ligne *c'd'* un angle de 30 degrés avec la ligne de terre *xy*; alors les triangles *o'b'p'* et *b'r'q'* seront *rectangles* et *semblables entre eux*, mais non *isocèles*, comme c'est facile à démontrer, et dans ce cas, la longueur de chaque partie de la ligne *ab* se comportera à l'égard de chaque partie de la ligne *a'b'*, comme *o'p'* envers *o' b'*, c'est-à-dire comme le côté opposé au plus grand angle est à l'hypoténuse. De la même manière se comporteront aussi les portions de la ligne *bc* à l'égard de celles de la ligne *b' c'*, comme *r' q'* à *q'b'*, ou comme le côté opposé au petit angle, est à l'hypoténuse. Ainsi donc, les portions de la ligne *ab* n'étant pas égales dans ce cas, comme dans la fig. 68, aux parties de la ligne *bc*, il faudra, outre l'échelle pour mesurer les hauteurs, avoir encore deux autres échelles pour la représentation des longueurs et des largeurs, dont l'une servira pour les longueurs et l'autre pour les largeurs. Celles-ci peuvent, par conséquent, être facilement retrouvées, en ce qu'on trace au-dessus de *o' b'* un triangle *o' p' b'* à angle droit, dont le côté *o'p'* formera avec *o'b'* un angle de 30 degrés, et le côté *p'b* un angle de 60 degrés. Ainsi l'hypoténuse *o' b* servira d'échelle pour les hauteurs, le côté *o'p'* pour les largeurs et le côté *p'b'* pour les longueurs; car *p' b'* = *r' q'* comme il est facile de le démontrer.

Pour la représentation du parallélipipède dans la position de la fig. 69 sur le plan de projection, on n'a pas non plus besoin d'un plan horizontal, mais on porte les longueurs données en chiffres des lignes *ab* et *bc* sur leurs échelles correspon-

dantes données par les côtés, celle de la hauteur *ae* sur l'hypoténeus, et l'on pourra de nouveau trouver par cette figure, à l'aide de cette échelle et en se servant du compas, les différentes mesures sur les échelles correspondantes. Si la figure était composée d'un plus grand nombre de lignes verticales et horizontales qu'on en a figuré ici, le mode d'agir n'en resterait pas moins le même.

§ 225. — En général donc, dans un triangle rectangle (où l'on considère l'hypoténuse comme unité de mesure de l'échelle destinée à prendre les mesures de la hauteur, dans lequel, d'autre part, un des angles aigus est pris égal à celui de l'inclinaison que la figure à projeter forme sur le plan horizontal avec la ligne de terre), les deux côtés de l'angle droit donneront les échelles pour les mesures qui sont en raccourci. Si donc *ab* (*fig.* 70) est donné comme étant l'échelle des hauteurs, et α comme étant l'angle suivant lequel la figure à représenter doit être inclinée sur le plan horizontal vers la ligne de terre, et s'il s'agit de trouver les deux échelles pour la détermination des longueurs et largeurs; dans ce cas, on décrira au-dessus de la ligne *ab* un demi-cercle, à l'une des extrémités de celle-ci, soit en *a*, on porte la corde *ac* sous l'angle donné α, et on tirera la corde *bc*, alors *ac* sera l'unité correspondante de l'échelle pour les longueurs, et *bc* celle de l'échelle pour les largeurs, si *ab* a été pris comme unité de mesure de l'échelle des hauteurs. En comparant cette figure avec la fig. 69, l'angle α concordera avec l'angle *ad'a*, et l'angle $\beta = 90° - \alpha$ avec l'angle *cd'c'*.

Si la ligne *ac* (*fig.* 70) est donnée, au contraire, comme unité de l'échelle pour les mesures de longueur qui sont en raccourci, et soit donné aussi l'angle d'inclinaison α, et s'agit-il de trouver l'unité pour la hauteur ou pour la longueur? On construira alors de *ac* et de α le triangle rectangle *abe*, et l'hypoténuse *ab* sera alors l'unité de l'échelle de hauteur, le côté *bc* celle de la largeur. On procèdera de même lorsque les lignes *bc* et l'angle β sont donnés, et lorsqu'il s'agit de trouver *ab* et *ac*.

Si l'angle $\alpha = 45°$, les deux côtés de l'angle droit seront alors égaux entre eux, et on aura besoin, comme pour la fig. 68,

que de deux échelles, une pour les mesures de hauteur et une pour celles des largeurs et les longueurs.

Si enfin on considère l'hypoténuse ab (*fig.* 70) comme représentant un certain nombre d'unités (admettons 4, par exemple), et si on abaisse des points 1, 2 et 3 des perpendiculaires sur les deux côtés ac et bc, en ce cas ac sera divisé en 4 unités de l'échelle de longueur, et cb en 4 unités de l'échelle de largeur, ou réciproquement.

Dans l'un ou dans l'autre cas, quand on aura trouvé la grandeur de l'unité pour chacune des échelles de hauteur, de de longueur et de largeur; on les dessinera séparément comme on peut le voir dans la fig. 70 en I, II, III, en donnant à chaque échelle un nombre quelconque de ces unités. On a déjà vu, d'après les règles indiquées précédemment pour la fig. 66 ou 67, comment on établirait ou subdiviserait ces échelles pour pouvoir prendre et porter avec une grande exactitude les différentes mesures.

Ainsi donc, tandis que pour un dessin qui représente l'objet que sous une de ses faces, il n'est nécessaire de tracer qu'une seule échelle au-dessous; ici, au contraire, pour les dessins en questions, il faudra 2 et même 3 échelles, suivant que l'angle d'inclinaison a ou n'a pas 45 degrés.

§ 226. — Il ne nous reste plus qu'à montrer comment on opère à l'aide de ces échelles proportionnelles.

Supposons que : la vue (*fig.* 71 VI) doive être dessinée dans la position représentée ici sur le plan vertical, sans se servir des vues IV et V. soit l'angle d'inclinaison que la ligne $a'g'$ (*fig.* V) forme avec la ligne de terre égale à l'angle α de la fig. 70; quant aux échelles I, II et III, elles devront être employées de telle sorte que les dimensions des hauteurs, qui doivent apparaître sans raccourcissement dans la figure, soient transportées à l'aide de l'échelle I, celles de largeur à l'aide de l'échelle II, et celles des longueurs à l'aide de l'échelle III. Soit donné d'autre part $AB = 5'$, $HC = 6\frac{2}{3}'$, $ZD = 8\frac{1}{3}'$, $ZK = 4\frac{1}{2}'$, $AH = 2'$, $HM = 4'$, $KP = \frac{1}{5}'$, $NQ = 1'$, $a'a'$ (*fig.* V) $= 2'$, $o'o''$ (*fig.* V) $= 2\frac{3}{4}'$ et $o'o'$ (*fig.* V) $= 7\frac{1}{2}$.

On fera dans la fig. VI, $zh = zm = ah = mg = 2'$, échelle III, et $aa = 2'$, échelle II, on élèvera dans les points a, a,

h, z, m et g des perpendiculaires sur xy, on fera $ab = ab = fg = 5'$, $ch = em = 6\frac{2}{3}'$ et $dz = 8\frac{1}{3}'$ d'après l'échelle I, et on tracera les lignes bb, cc, dd, bd, bd et df, et ainsi le corps principal de la figure se trouvera représenté. On fera d'autre part, $hi = ml = 2\frac{1}{2}'$ échelle I, et on tracera au-dessus de il une demi-ellipse ikl (comme étant la projection du demi-cercle IKL), pour laquelle sont donnés deux axes de 4' de longueur d'après les échelles I et III. Enfin, on fera $mm' = 2'$ (échelle II), et on mènera la perpendiculaire $m'l''$, ainsi que la partie apparente de l'ellipse semblable, ainsi que cela se voit dans la figure. Pour la représentation du prisme quadrilatéral supérieur, on fera $kp'_{,} = \frac{1}{2}'$, échelle I, et on déterminera le point $u'_{,}$ soit en traçant à part le carré NOPQ, et en menant la diagonale, ou bien en faisant $p'u' = \frac{1}{2}\sqrt{1^2+1^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\frac{1{,}414}{2} = 0{,}707$. On mènera ensuite par u' une ligne parallèle à xy, on fera $u'u = 2\frac{1}{4}'$ et $uu = 7\frac{1}{2}$, échelle II. D'autre part, on fera $p'n' = PN$ et $q'o' = 1{,}414$ d'après l'échelle III, c'est-à-dire égal à QO ou égal à PN, mais d'après l'échelle III, et on tracera le parallélogramme $n'o'p'q'$, dont le point central est u'. Enfin on tracera aussi en u et u deux parallélogrammes $nopq$, qui sont égaux à celui en u', et on mènera les lignes nn et pp aussi loin qu'elles se montrent dans la figure, et la projection se trouvera exécutée.

Si les points b, c et d, comme aussi f, e et d sont reliés non par des lignes droites, mais, comme c'est le cas dans la fig. IV, par des lignes courbes; il faut alors, pour les représenter dans la fig. VI, tracer d'abord une des courbes, par exemple EF. On partagera ensuite la ligne MG, ainsi que sa correspondante mg dans la fig. VI en un certain nombre de parties égales, par exemple en 4, et on déterminera par des abcisses et des ordonnées, dans la fig. VI, les points 2, 4 et 6 qui, reliés avec e et f, forment la projection de la courbe EF. On procèdera de même pour la représentation des courbes de, dc et bc, et pour la courbe ikl, si IKL n'est pas un demi-cercle, mais une ligne courbe quelconque. Enfin il ressort de ce qui a été dit jusqu'à présent, et par la fig. 71, comment les cylindres IL et RS dans la fig. VI doivent être représentés si leurs distances et leur diamètre ont été donnés.

On voit en même temps, par ce qui vient d'être dit, que lorsque l'on'a à tracer des lignes courbes qui ne soient pas des cercles ou des arcs, on n'atteindra point le but avec les échelles proportionnelles, et qu'il faudra encore faire usage de quelques autres constructions auxiliaires. Malgré cela, tout le travail s'exécute, en général, plus promptement et plus facilement; car l'on a pas besoin des deux plans horizontaux, et on peut en outre se servir des échelles établies pour la détermination des différentes *abscisses* et *ordonnées*.

§ 227. — Il est évident que lorsqu'une figure est déjà dessinée dans la position représentée dans la fig. 7 t, VI, on pourra prendre de nouveau et de la manière la plus simple les mesures des lignes droites partielles, à l'exception des lignes bd, df, qn, d'après les échelles qu'on a dressées. Mais s'il s'agit de trouver aussi la longueur de ces lignes, il faudra ou tracer le triangle bdf, d'après l'échelle I, par laquelle on obtiendra le triangle BDF (*fig.* IV), puis mesurer les côtés BD et DF, d'après l'échelle I; ou bien on pourra aussi trouver cette longueur par le calcul $bd = \sqrt{d\delta^2 + b\delta^2}$ en mesurant $d\delta$ avec l'échelle I et $b\delta$ avec l'échelle III, et substituant la longueur trouvée dans cette formule.

§ 228. — La construction indiquée ici à l'aide d'échelles proportionnelles est d'une exécution d'autant plus facile qu'il y a un moins grand nombre de lignes courbes à dessiner et que l'objet à représenter (comme c'est en général le cas) a une position *parallèle* à l'un de deux plans de projection. S'il en était autrement, c'est-à-dire si cet objet a une position inclinée vers les deux plans de projection à la fois; dans ce cas sa représentation exige, en principe du moins, même lorsqu'il ne se compose que de lignes droites, un dessin auxiliaire, comme on le verra dans la proposition suivante.

Mais comme ces dessins auxiliaires, dans les cas indiqués, ne doivent contenir d'abord que le coutour principal, la forme et les parties principales, et qu'en second lieu (ce qu'il faut bien remarquer ici), ils ne doivent pas être exécutés sur la même feuille de papier, sur laquelle on projette le dessin incliné vers le plan de projection verticale, car il vaut mieux se servire ici d'une feuille de papier séparée; il s'ensuit que

les inconvénients signalés, en troisième lieu, dans le § 221, n'existeront point.

Mais il faut encore rappeler ici, en général, les deux théorèmes suivants, dont l'observation facilite beaucoup dans la pratique ces constructions :

1° Deux points déterminent la direction et la longueur d'une ligne droite.

2° Les lignes qui sont parallèles dans l'espace, le sont aussi dans toutes leurs projections.

§ 229. — *Problème.* — Soit donné dans la fig. 72 AB = 10, BC = 4, l'épaisseur des deux parallélepipèdes parallèles = 1, leur écartement *dd'* = 2' ; d'autre part EF = 2, EH = 3, la longueur de ce corps *hh'* = 6 et l'angle CD *y* qu'elle forme avec le plan horizontal. L'on doit représenter la projection verticale de ces corps à l'aide d'échelles proportionnelles, quand ils sont inclinés sous un angle de 45 degrés vers le plan de projection verticale.

Solution. — Comme l'angle d'inclinaison formé avec la surface du plan vertical, doit être égal à 45 degrés, on n'aura besoin que des deux échelles I et II pour la représentation de ladite figure, dont on trouvera les longueurs respectives à l'aide du dimi-cercle *m p n* d'après le (§ 225), après avoir exactement établi cette échelle; puis on dessinera d'après l'échelle I toute la vue le rapport de (*fig.* III) dans une position parallèle à la surface du plan vertical. Ensuite on abaissera du point C sur *x y* la perpendiculaire CI, on prendra à volonté le point *i* (*fig.* IV) on mène la perpendiculaire *ic* (*fig.* IV) = IC (*fig.* III); de plus, on mesurera la ligne ID (*fig.* III) avec l'échelle I, et on portera la mesure obtenue d'après l'échelle II de *i* en *d* (*fig.* IV). Si maintenant on mène la ligne *cd*, elle sera la projection de la ligne CD, comme aussi *cdi* sera la projection de l'angle CDI. D'autre part on abaissera du point B (*fig.* III) sur *xy* la perpendiculaire BK, on mesurera avec l'échelle II'K, et on portera cette mesure sur l'échelle II dans la fig. IV de *i* en *k*. En K on élèvera sur *xy* une perpendiculaire, on fait *kb* = KB (*fig.* III) et on mènera *bc* ; cette ligne sera de nouveau la projection de la ligne BC (*fig.* III), de même que l'angle obtus *bcd* (*fig.* IV) sera la projection de l'angle droit BCD (*fig.* III). Après quoi

on fera dans la fig. IV $dd = 1'$, $dd' = 2'$ et $d'd' = 1'$ d'après l'échelle II, et on mènera les lignes ad et $a'd'$ parallèlement à bc; les lignes ab et $a'b'$ parallèlement à cd, et les lignes aa, $a'a'$, bb, $b'b'$ parallèlement à xy, et ainsi se trouvera terminée la projection des deux parallélepipèdes.

On suit la même voie pour la représentation du corps EFGH. On mesurera IH avec l'échelle I et on portera cette mesure dans la fig. IV de i en h' avec l'échelle II. Après quoi on déterminera les points e' et f' d'après E et F de la même manière que le b a été déterminé par B; on mènera les lignes $e'f'$ et $e'h'$ (dont la dernière n'est menée que jusqu'à la ligne cd) et ainsi $e'f'$ sera parallèle à cd, de même que $e'h$ le sera à bc, parce que EF était parallèle à CD et EM à BC. Enfin, on fera la ligne $e'e$ menée parallèlement à $xy = 1'$ d'après l'échelle II, et on mène eh parallèlement à $e'h'$, ef et hg parallèlement à $e'f'$, fg parallèlement à eh, ff' parallèlement à ee; on fera $hh' = 6'$ de l'échelle II, puis alors on mènera $h'q$ parallèlement à $e'h'$.

Par la figure et par ce qui a été dit plus haut, on comprendra comment on parvient à projeter dans la fig. IV le cylindre joint au plan EFGH, dont le diamètre doit être égal à $1\frac{1}{2}'$ et la longueur à $2\frac{1}{2}'$; il ne sera cependant pas inopportun de faire remarquer que le grand axe mn de l'ellipse $monp$ n'est point parallèle à eh ou fg, mais doit, au contraire, être vertical sur la ligne de terre xy, et qu'il importe surtout pour la projection du cylindre de déterminer le point q du plan $efgh$ de la fig. IV. Mais ce point sera trouvé, soit en employant le procédé mis en usage pour la recherche des points e, f, g, h, soit en partageant en deux la ligne ef, en mènant de ce point de partage une parallèle à eh, et en déterminant sur cette dernière le point q, de telle sorte qu'il soit à la même distance de xy, que Q l'est de xy. Après quoi on transportera avec l'échelle II, $qq' = 2\frac{1}{2}'$, et on dessinera la demi-ellipse mon comme aussi ellipse entière, $m'o'n'p'$ comme étant la projection du cerle MONP.

§ 229. (a.) — Un point S étant donné, peu importe dans quelle partie du plan ABCD fig. 72, III, et la projection de ce point doit-elle être déterminée dans la fig. IV; on abaissera alors

de S sur xy la perpendiculaire SR, on mesurera IR d'après l'échelle I, et l'on portera cette mesure dans la fig. IV de i à r avec l'échelle II. Après quoi, on élèvera sur xy la perpendiculaire rt, et on fera sur celle-ci $rs = \text{RS}$, et s sera la projection cherchée du point S. L'exactitude de ce mode de construction n'a pas besoin de plus amples explications.

Mais de même que ce point S a été projeté de fig. III en fig. IV, on pourra agir de même, pour tout autre point, par suite d'un système de points et en définitif représenter sur le plan $abcd$ la projection de chaque figure donnée en ABCD.

Si S est la projection d'une ligne de la longueur de RU, on trouvera alors dans la fig. IV la projection Su de cette ligne, en ce que l'on mesure la longueur de RU avec l'échelle I, et qu'on reporte cette longueur de s à u avec l'échelle II, dans une direction horizontale. Par ce procédé, on est encore mis à même de donner en la fig. IV la projection de tout point qui est situé en dehors du plan ABCD, mais dont la distance verticale du plan ABCD est connue, mais dans la fig. IV, cette projection se trouvera de nouveau située hors du plan $abcd$. Et comme la projection d'un corps est déterminée par un système de points à projeter, ce qui a été enseigné plus haut, on pourra trouver dans la fig. IV, par la même voie décrite alors, la projection de chaque corps, pourvu qu'il se trouve dans un rapport donné avec le plan ABCD de la fig. III.

§ 230. — Si l'on veut prendre dans la fig. 72 IV, les mesures des lignes partielles d'après les échelles proportionnelles respectives, on ne pourra le faire directement que pour les lignes qui sont parallèles à la ligne de terre, telles, par exemple, que aa, hh', bb', etc. Si, au contraire, on doit mesurer les autres lignes qui n'ont pas une direction parallèle à xy, comme par exemple cd, il faudra, puisque la longueur de ci doit s'obtenir d'après l'échelle I et celle de id d'après l'échelle II, ou bien construire réellement le triangle CDI, fig. III, d'après l'échelle I, et mesurer CD, ou bien il faudra déterminer par le calcul $cd = \sqrt{ci^2 + id^2}$, par lequel on obtiendrait pour le cas précédent $cd = 10'$. Ces deux procédés peuvent aussi être employés pour trouver les mesures de longueur des autres lignes de ce genre.

§ 231. — Quoi qu'il en soit, on voit suffisamment par les deux exemples fig. 71 et 72 quel grand avantage cette manière de procéder offre comparativement à celle indiquée dans les chapitres précédents; de plus, on voit que par cette méthode on évite les inconvénients indiqués au § 221, ce qui était surtout important ici.

Ces avantages ressortiront encore avec plus d'évidence dans l'usage que l'on fera de la méthode en question, et ils offriront au dessinateur, lorsqu'il aura acquis une certaine habitude de dessiner d'après plusieurs échelles, les moyens d'atteindre le plus promptement et le plus simplement le but désiré.

§ 232. — Il n'y a nul doute que les moyens qu'on vient de décrire ne soient très utiles pour représenter des objets qui ont des formes inconnues ou très compliquées, puisqu'ils se rapprochent en quelque façon de la perspective, et qu'ils facilitent singulièrement, à l'aide d'*un seul* dessin l'intelligence de l'ensemble, en même temps qu'ils permettent de prendre directement, des mesures avec le compas. Mais aussi, on ne peut disconvenir que ce mode d'agir réclame en général plus d'exercice que ce n'est le cas pour les dessins qui représentent les objets dans une position parallèle avec le tableau, et qu'on ne pourra l'appliquer que rarement à cause du grand nombre d'échelles et de lignes à tracer si ce n'est pour faire des croquis qui serviront à l'exécution exacte du dessin.

D'après cela, on ne devra faire usage de pareils dessins que lorsqu'il s'agira de donner à quelqu'un, à l'aide d'un dessin et surtout d'un dessin géométrique, une idée plus nette de l'objet à réprésenter, surtout lorsqu'on est convaincu que plusieurs dessins partiels n'atteindraient pas le même but et qu'on ne se trouve pas dans la nécessité de faire un dessin en perspective. On ne peut assez recommander ce genre de représentation comme exercices pratiques pour un commençant. Par eux, il apprendra à être attentif à bien des détails qui passent inaperçus à la première vue et même après un examen attentif, détails que nous n'avons pas même pu faire connaître en totalité dans ce chapitre. Par là, il aura non seulement l'occasion de se pénétrer davantage de tout ce qui a rapport à la géométrie descriptive, mais il arrivera encore par la comparaison de cette

méthode de procéder, à l'aide d'échelles proportionnelles, avec celle des chapitres précédents, à des considérations et des résultats intéressants et surtout il acquerra dans ce genre de construction une grande dextérité.

§ 233. — Comme on l'a déjà fait observer plus haut, les dessins pour lesquels on donne sur le plan, à l'objet à figurer une certaine inclinaison, soient choisis préférablement pour la représentation des machines plutôt que pour celle de bâtiments entiers. Pour ces derniers, on atteint, dans le plus grand nombre de cas, le but à l'aide de dessins partiels des différentes élévations et coupes, et cela dans des positions parallèles au plan. Ajoutons encore qu'un pareil dessin géométrique, qui représente, par exemple, un bâtiment vu à la fois de deux côtés, perdra de sa netteté et de sa beauté parce qu'il apparaîtra toujours à l'observateur comme si la partie postérieure du bâtiment était plus élevée que la partie antérieure, ce qui est causé par le grand nombre de lignes parallèles tant verticales que horizontales, et on s'aperçoit aussitôt qu'il n'y a point, dans ces dessins, les réductions et les raccourcissements que l'on voit toujours dans la nature ainsi que dans les dessins en perspective. Cette illusion d'optique n'est pas aussi sensible dans les dessins des machines et en général d'objets de plus petites dimensions ou qui sont composés de la réunion d'un grand nombre de corps de formes différentes et en différentes positions. Cependant dans ces dessins on constate l'absence de toute perspective, et cela d'autant plus que l'on placera à côté d'eux un objet représenté en perspective.

CHAPITRE VII.

Du dessin linéaire et des traits de force.

§ 234. — Lorsqu'on dessine un objet de telle sorte que son contour et les parties intérieures ne soient figurés que par *des lignes* droites et courbes (telles qu'elles se projettent sur un plan); on aura alors le *dessin linéaire* de cet objet.

C'est là le mode *le plus simple et le plus facile* de figurer un objet, puisque l'on n'a qu'à repasser à l'encre de Chine les lignes que l'on a d'abord tracées exactement au crayon. Il n'est pas prudent de laisser les dessins simplement exécutés au crayon sans les mettre au trait, quand même les lignes seraient tracées avec exactitude et bien arrêtées, parce qu'elles s'effacent facilement et que, par là, le dessin ne pourrait servir à un long usage.

On se sert, aussi souvent que les circonstances le permettent, de ce genre de dessin, qui offre le grand avantage d'économiser au dessinateur beaucoup de temps et de peinés.

§ 235. — Mais hâtons-nous de le dire, ce genre de dessin laisse à désirer sous le rapport de la clarté lorsqu'on veut à son aide représenter un corps. Les raisons de cela, les voici : c'est que dans un dessin géométrique, les lignes droites parallèles avec la surface d'un plan apparaissent seules dans leur grandeur et leur forme véritables, tandis que celles qui ont une position inclinée vers ce plan apparaissent sous une forme et une grandeur qui n'est pas la réelle; enfin, que dans le tracé des lignes et surfaces courbes, il en résulte encore d'autres al-

térations de leur forme véritable, altérations qui sont déjà très sensibles, si l'on se rappelle ce que nous avons dit au § 58, à savoir que ce genre de dessin ne peut jamais figurer les corps tels qu'ils se présentent dans la nature, à l'œil de l'observateur; aussi peut-on affirmer qu'un dessin linéaire, pour lequel on a supposé l'objet représenté dans une position *parallèle* au plan, ce qui d'ordinaire est le cas, n'est intelligible qu'autant qu'on connaît déjà cet objet et qu'on se trouve ainsi aidé par là pour la compréhension de l'objet lui-même. Rarement on obtiendra, par un dessin linéaire, la représentation exacte d'un corps inconnu, attendu qu'on reste toujours dans l'incertitude sur les formes à donner aux parties de ce corps qui ne sont pas parallèles au plan; et que, d'autre part, on ne peut, à l'aide d'un semblable dessin, voir si le corps figuré est composé de surfaces planes ou courbes; enfin savoir qu'elle est la forme et la position qu'il affecte.

§ 236. — Pour se convaincre de la vérité de cette assertion, admettons par exemple A (*fig.* 73) comme étant la projection verticale d'un objet quelconque; la projection horizontale pourra alors avoir la forme de B, de C, de D, de E, de F, et de beaucoup d'autres encore. Mais qui pourrait dire d'une manière sûre, en voyant la fig. A, quelle est la forme de la projection horizontale? Et qui pourrait, d'un autre côté, en voyant les différentes projections horizontales, déterminer la forme de la projection verticale? Qui peut encore savoir, en voyant un cercle, s'il est l'image d'un plan, ou d'une sphère, ou d'une demi-sphère concave, ou d'un cône vu d'en haut, etc., lorsqu'il n'y a point de vue latérale qui complète le dessin? Et qui pourra reconnaître, dans un triangle, l'image d'un plan, ou d'un cône, ou d'une pyramide, etc., si la projection horizontale n'a pas été donnée? Pour remédier à ces défauts du dessin linéaire, il est nécessaire de figurer plusieurs vues de l'objet, et même encore on n'arrivera pas toujours à la connaissance parfaite de cet objet par un simple coup-d'œil; mais souvent on n'y arrive que par des conclusions.

§ 237. — Pour pouvoir donc rendre un dessin de ce genre plus intelligible, pour se rapprocher davantage de la vérité et pour que les parties qui le composent prennent un aspect plus

conforme à la réalité, on donnera à la figure qui représente un objet, et cela à l'aide *du lavis*, une certaine coloration par laquelle les formes et les positions des parties placées en avant et en arrière de l'objet sont représentées plus nettement et plus distinctement, ce qui s'obtient à l'aide d'une répartition exacte des lumières et des ombres. Dans la troisième partie de cet ouvrage, on verra que le but que l'on se propose par le lavis n'est pas seulement d'embellir le dessin, mais que souvent il est nécessaire pour rendre le dessin plus intelligible, que quelques coups de pinceaux enlèvent de l'esprit le doute que l'on a sur la forme de la figure, ainsi qu'on l'a vu pour la fig. A, § 236.

§ 238. — Dans cette étude que nous ferons de la distribution des lumières et des ombres, on verra que le lieu d'où part la lumière et la direction des rayons lumineux, qui viennent frapper l'objet, sont tout-à-fait indifférentes, qu'en général, cependant, on donne à ces derniers une direction, oblique telle qu'ils frappent et éclairent les côtés antérieur, supérieur et latéral gauche du corps, tandis que leurs ombres sont projetées *en arrière, en bas et sur le côté latéral droit.*

Afin donc de donner à un dessin linéaire plus de netteté et aussi pour le rendre plus beau, on appliquera ce que nous venons de dire en donnant plus d'épaisseur, de volume et de force aux lignes qui se trouvent situées à droite et en bas du corps dessiné. C'est à ces lignes plus foncées que l'on donne le nom de *traits de force*. Ceux-ci marqueront donc le lieu où seraient placées les ombres, si on avait distribué sur le dessin les lumières desquelles nous avons parlé, et ils peuvent encore être envisagés comme une indication du lavis à faire. Lorsqu'ils sont convenablement placés et proprement tracés, ils facilitent l'intelligence d'un dessin et l'embellissent en même temps; car en alternant ainsi des lignes fines et les lignes fortes, on détruit l'uniformité du dessin et on le rend plus agréable à la vue et surtout on parvient à faire distinguer les parties de l'objet qui sont placées en avant, de celles qui sont en arrière.

En un mot, l'emploi dans un dessin linéaire des traits de force donne à celui-ci tout le degré de clarté dont il est susceptible.

§ 239. — Quelque simple et facile que paraisse être au pre-

mier abord le tracé des traits de force, il offre cependant aux commençants des difficultés, parce qu'ils ne savent pas bien déterminer le lieu où ils doivent les placer, d'après la nature des corps. Cependant un examen attentif, d'un dessin surtout bien exécuté, dissiperait bientôt ces difficultés.

On n'a qu'à se figurer toujours le corps auquel on veut appliquer ces lignes comme étant *isolé*, donner ensuite *plus d'épaisseur* et marquer avec plus de force les lignes de contour qui se trouvent à droite et au bas dudit corps, qu'à celles qui se trouvent en haut et à gauche, attendu que l'on considère ces dernières comme faisant face aux rayons lumineux.

§ 240. — En disant dans le paragraphe précédent que dans le dessin d'un objet on doit placer au bas et à droite les traits de force, il va sans dire qu'il ne peut être question ici que d'objets *convexes et ayant du relief*. Pour les *corps concaves ou creux*, au contraire, on doit établir les traits de force non à droite et au bas, mais bien *à gauche* et *au-dessus* de la cavité, parce qu'alors ils doivent marquer en même temps les ombres de la masse solide qui circonscrit le vide.

Dans la fig. 74 où *a b c d* figure la surface plane antérieure d'un corps à 4 faces, et *efgh* une ouverture carrée qui se trouve dans celui-ci, il sera nécessaire que les lignes *bc* et *c d* qui sont, d'après le § 238, des traits de force, soient marquées plus fortes et plus larges que les lignes *a b* et *a d*. Les lignes *f g* et *g h* ne peuvent être prises pour des traits de force, attendu que *efgh* n'est pas le contour d'un corps en relief, mais bien celui d'un espace vide. Voilà aussi pourquoi ces lignes ne sont pas des traits de force. Par contre, *f e* et *c h*, qui se trouvent situés *au-dessous* et *à droite* de la partie *solide* de ce corps sont des traits de force, et pour cette raison, ils seront plus marqués et plus forcés que *f g* et *g h*.

§ 241. — La figure 75 offre l'image d'un cylindre creux. Ici, il faut que les deux cercles externes concentriques, dont le plus petit doit être placé un peu en avant du plus grand, et tout de même figurer un plus petit cercle, soient dessinés de telle sorte, qu'au bas et à droite ils soient plus marqués qu'en haut et à gauche. Au contraire, le petit cercle concentrique qui représente le creux du cylindre, doit être maintenu d'après

le § 240, en haut et à gauche plus marqué que en bas et à droite.

Mais pour trouver le lieu où, dans de semblables figures de forme ronde, commencent les traits de force, et celui où ils s'arrêtent, on tracera le diamètre *ab* horizontalement ou parallèlement à la ligne de terre *xy*, et on élèvera sur elle le diamètre perpendiculaire *cd*. On reliera les points *a* et *c* par une ligne droite, et on mènera parallèlement à elle le diamètre *gm*. Alors les points d'intersection *g*, *h*, *i*, *k*, *l* et *m* détermineront le commencement et la fin des traits de force. La liaison de ces lignes fortes avec les fines doit être tellement ménagée, que la plus large se confonde insensiblement avec la plus fine.

§ 242. — Remarquons encore que, en général, lorsqu'on trace des traits de force, on ne les établit pas tout d'abord dans un dessin, mais seulement après que tout celui-ci aura été tracé en entier avec des lignes fines et d'une épaisseur égale. Le dessin deviendra non-seulement plus propre, plus exact et plus égal; mais on y gagnera le temps que l'on croyait économiser en traçant immédiatement les traits de force sur les lignes tracées au crayon, puisqu'on ne sera pas obligé de s'occuper de disposer à chaque instant son tire-ligne une fois pour des lignes fines, d'autres fois pour des traits de force. Un dessinateur expérimenté peut seul se permettre de tracer immédiatement les traits de force sur les lignes faites au crayon, lorsqu'il s'agit d'objets peu compliqués, et lorsque surtout on ne tient pas à la beauté du dessin. Si on appliquait sur un dessin linéaire des couleurs, on n'exécuterait alors les traits de force qu'après que toutes les surfaces auraient reçu leur teinte et seraient suffisamment sèches.

En général, les traits de force sont tracés extérieurement et le plus près possible des lignes fines, de telle sorte que celles-ci forment la limite supérieure de ces traits de force qui sont audessous d'une surface, et qu'elles limitent à gauche ceux qui sont tracés à droite. On voit aussi comment il faut les tracer pour les courbes et en général pour les lignes qui forment avec la ligne de terre des angles aigus.

§ 243. — Si sur une même feuille on a dessiné plusieurs

vues d'un même objet, par exemple, la vue antérieure, la vue latérale, ainsi que la projection horizontale, la coupe, etc., les traits de force devront, dans toutes ces vues, avoir les mêmes directions, c'est-à-dire, que toujours elles seront placées à droite et au bas du corps, comme on le voit dans la fig. 14. Dans cette figure, en effet, quoique la lumière vienne frapper tantôt une face, tantôt une autre, selon les différentes projections et rabattements, les traits de force n'en restent pas moins appliqués au même côté.

Les traits de force devront donc avoir, dans chaque vue, une même direction, et les lignes qui sont la limite des corps et qui produisent l'ombre seront figurées plus foncées, puisqu'elles sont des traits de force. Dans l'étude de la distribution de la lumière et des ombres, qui fera le sujet de la partie suivante de cet ouvrage, on s'étendra davantage sur ce qui vient d'être dit, et il sera fait mention, en particulier, dans le § 483 et suivant, des avantages que la pratique retire de ce mode de représentation (§ 74, *fig.* 14).

§ 244. — Si un dessin, après qu'il aura été tracé, doit être *lavé*, il sera nécessaire alors de passer sur toutes ces lignes avec une encre pâle. Le dessin ne peut qu'y gagner en beauté, attendu que les lignes sombres le défigurent, puisque les corps dont on se propose de représenter les formes, ne sont pas dans la réalité entourées de lignes noires, mais que le contour de leurs faces, de leurs angles ne se distinguent que par la limite des ombres et de la lumière.

On facilitera beaucoup la clarté et l'intelligence d'un objet lorsque dans le dessin linéaire qui représente l'image de cet objet qui est formé de la réunion de plusieurs parties, on se servira d'une encre qui ne soit pas d'une teinte uniforme, égale, mais qui soit tantôt pâle et tantôt foncée, de telle sorte enfin que plus les parties s'éloignent, plus la teinte appliquée devient pâle, c'est-à-dire que les parties les plus rapprochées reçoivent la teinte la plus foncée, et les plus éloignées la teinte la plus pâle; en effet, on obtient par cette différence des lignes un moyen simple de distinguer les parties éloignées de celles qui sont rapprochées, quoique l'on ne puisse reconnaître par là la longueur des distances. Quant aux traits de force, la même ob-

servation leur est applicable. Comme les autres lignes, ils conservent la même épaisseur, soit qu'on les applique aux parties du corps les plus rapprochées ou à celles qui sont les plus éloignées: quant à leur teinte claire ou foncée, on observera le même rapport qui existe pour les autres lignes, avec cette différence qu'il faut les maintenir ordinairement plus foncées que celles-ci.

§ 245. — Pour ce qui a rapport à la largeur relative des traits de force, on leur appliquera ce que nous avons dit dans le § 2 sur la largeur en général des lignes qu'on trace; il en résulte que leur largeur doit être en un certain rapport avec la grandeur de l'échelle du dessin; mais cette échelle n'a aucune influence sur le plus ou moins de force de ces traits; en tous les cas, ils doivent être plus foncés que les lignes fines, et il n'y a d'exception que dans le cas indiqué dans le paragraphe précédent.

CHAPITRE VIII.

—

De la copie des dessins.

§ 246. — Certes, le mode le plus facile pour obtenir sur le papier la figure d'un corps, c'est d'en faire la copie d'après un dessin. Il ne s'agit pour cela que de prendre avec le compas les lignes et les angles du modèle, puis les reporter; on peut, du reste, s'en rapporter complétement à ce modèle, s'il est bien fait et s'il est exact, sans s'inquiéter des mesures réelles et des rapports des différentes parties entre elles, ni des projections des lignes et des angles, ni des teintes ou de l'application des couleurs, puisque, comme on vient de le dire, il ne s'agit que d'imiter l'original.

§ 247. — Pour faire promptement et avec exactitude ce travail, il sera avantageux de pouvoir tracer sur le modèle, mais très superficiellement et avec le crayon, une espèce de réseau de lignes (§ 24), c'est-à-dire quelques lignes auxiliaires menées dans une direction verticale et horizontale, en observant qu'elles coupent l'objet que l'on veut représenter en certains points essentiels du dessin. Après quoi on établit sur le papier, sur lequel on veut copier ce dessin, ce même réseau, et par-là on obtient des points fixes à l'aide desquels il est facile de déterminer les autres points du dessin. Il est difficile d'indiquer des règles générales pour le tracé de ces lignes auxiliaires, comme aussi d'indiquer le lieu dans lequel elles doivent être tracées, attendu qu'elles s'établissent uniquement d'après le corps à dessiner, et que c'est ainsi au dessinateur à juger ce qu'il y a à faire sous ce rapport. Pour des corps symétriques (§ 10), on trace en général une ligne passant par le milieu du dessin; pour des corps, au contraire, qui n'apparaissent pas sous forme symétrique, on trace un grand nombre de lignes auxiliaires dans les lieux où beaucoup de lignes du dessin s'entrecroisent, et là où se trouvent encore dans le dessin d'autres points essentiels.

Il est vrai que ces lignes auxiliaires, quoique très légèrement tracées au crayon, sont sous un certain rapport nuisibles au modèle; cependant, elles ne l'endommagent pas si on a soin de ne se servir que de bons crayons, si les lignes tracées avec celui-ci peuvent facilement être effacées, si on a soin de les tracer légèrement et très fines, et de ne pas faire avec le compas des trous lorsqu'on les mesure, enfin si on a soin de les effacer légèrement, à l'aide de la gomme élastique, ou mieux avec la mie de pain blanc, après le travail fini. S'il était défendu, ou que d'autres circonstances ne permissent pas d'avoir recours à ces lignes auxilaires, on terminera alors sans elles, mais le travail sera plus long.

§ 248. — Pour obtenir en peu de temps la copie d'un dessin, on se sert parfois avec avantage de l'aiguille à piquer. Pour cela, on étend le modèle sur la feuille de papier sur laquelle on veut reproduire le dessin, on l'y fixe à l'aide d'aiguille ou d'un autre moyen; après quoi, à l'aide de cette aiguille, on pique chaque point essentiel du modèle, de telle

sorte qu'il le traverse et vienne marquer exactement la feuille de papier située au-dessous. Après cela, on relie ces points obtenus par des lignes droites ou courbes tracées au crayon, en suivant les contours du modèle, et l'on terminera facilement le reste du dessin après en avoir ainsi tracé sur le papier toute la carcasse.

Il est, pour ainsi dire, inutile de dire que ce moyen de copier les dessins n'est applicable que là où l'on ne tient plus à la conservation du modèle, puisqu'il se trouve endommagé et défiguré par les perforations qu'on a été obligé d'y faire.

Remarque. — Dans un dessin exécuté par une main bien exercée, il est impossible de reconnaître les figures qu'on a été obligé d'y faire, même en plaçant ce dessin contre le jour.

§ 249. — On peut aussi copier ce dessin en le plaçant sur une vitre et contre le jour, ou en se servant d'un papier huilé.

Dans le premier cas, on fixe son papier sur le modèle à l'aide d'épingles ou de colle à bouche, on les place alors contre une vitre en ayant soin que la feuille de papier blanc reste du côté du dessinateur, et on suit à l'aide du crayon les lignes que l'on remarque sur le modèle. Mais comme il est très fatigant de maintenir longtemps ce dessin avec la main gauche, et que les châssis de la fenêtre mettent beaucoup d'obstacle à la confection exacte et commode de tout le dessin, on a recours, pour ce genre de copie à la transparence, de la *machine* dite *à copier*, qui est composée d'une vitre fixée dans un châssis en bois et qui est lui-même placé sur un tréteau fort simple, ayant la forme d'un pupitre de musique. Lorsqu'on veut s'en servir, on sort la vitre de sa rainure, on pose sur la vitre le dessin à copier, et sur celui-ci une feuille de papier fort propre, après quoi on replace de nouveau la vitre avec les deux feuilles de papier ainsi superposée dans le pupitre, de telle sorte que la vitre soit située du côté de la lumière, et la feuille de papier en face du dessinateur. On arrive par ce moyen si simple de transparence, à reproduire sur le papier le dessin que l'on veut copier.

On pourrait encore perfectionner cette machine, si on fixait à la planchette existant dans cette machine un miroir que

l'on placerait derrière le pupitre pendant qu'on opère, afin que les rayons lumineux se multiplient sur le côté du verre opposé à celui qui fait face au dessinateur, mais pour cela il sera nécessaire de donner à ce miroir une certaine inclinaison.

Lorsqu'il s'agit de copier des dessins plus grands, on se sert encore d'une autre machine dite à copier, mais n'ayant point de vitre, et dans laquelle le modèle aussi bien que la feuille de papier, au lieu d'être tendus dans un cadre, se trouvent appliqués sur deux rouleaux qui, tournés en sens contraire, tendent fortement les feuilles de papier.

§ 250. — Lorsque pour copier un dessin on se sert de papier huilé, on place celui-ci sur le modèle, et on suit soit avec un crayon ou même à l'encre de Chine, les lignes que l'on aperçoit, et l'on obtient ainsi, sans plus de difficulté, la copie du dessin sur ce papier huilé.

On peut ensuite transporter ce dessin du papier huilé sur une feuille de papier bien propre, en piquant tous les points du dessin avec l'aiguille, ou bien on applique une couche de fusin sur le côté opposé du dessin de la feuille huilée, ou encore on repasse de ce côté toutes les lignes avec un crayon fort tendre, puis on applique cette feuille de papier huilé, en observant que le côté chargé du fusin soit appliqué sur la surface de l'autre papier. Après quoi, avec un petit bout de bois pointu, on repasse sur les lignes du papier huilé en appuyant légèrement, afin que par là ces lignes soient reproduites sur la feuille de papier, en y laissant une empreinte du fusin ou du crayon; enfin, on repasse au crayon ou à l'encre les mêmes lignes, et l'on obtient ainsi la copie exacte du dessin. A la rigueur, il n'est pas nécessaire de faire usage de papier huilé pour produire un semblable calque; tout papier noirci par derrière avec du fusin ou avec du crayon peut remplir ce but.

§ 251. — Lorsqu'il s'agit de copier un dessin, de telle sorte que cette copie soit ou plus petite ou plus grande que le modèle, on commencera par se tracer une échelle particulière, dont la réduction est ou plus petite ou plus grande que celle de l'original même; on prendra ensuite avec le compas les mesures du modèle, on les portera sur l'échelle qui lui appartient,

puis on prendra ces mêmes mesures sur les échelles augmentées ou réduites de la copie, et enfin on reportera les lignes ainsi trouvés sur la copie.

Par là on obtiendra les mesures des parties séparées de tout le dessin, à la vérité plus petites ou plus grandes que celles de l'original, mais elles seront dans des rapports exacts avec le tout et entre elles.

Si la réduction de l'échelle doit être faite dans un rapport donné, et que la copie soit, par exemple, par rapport à la surface, deux fois, etc., plus grande ou plus petite que le modèle, les mathématiques fourniront alors les indications d'après lesquelles cette réduction doit se faire, et montreront comment on peut trouver la grandeur de chaque mètre, etc., de l'échelle nécessaire.

§ 252. — *Problème*. — On doit faire un dessin deux fois, trois fois, etc., plus grand que le modèle, fig. 76.

Solution. — On mène deux lignes AB et BC à angle droit, on prend avec le compas une unité de mesure de l'échelle du modèle, qui sera égale à a ; on fera $BD = BE = a$, et l'on mènera DE; cette ligne donnera la longueur de chaque unité de l'échelle par laquelle la copie sera deux fois plus grande que le modèle. Si l'on porte la ligne trouvée DE, de B vers F, c'est-à-dire si l'on fait $BF = DE$, et si on mène la ligne EF, on obtiendra par là la longueur d'une unité de mesure qui appartiendra à une échelle du dessin que l'on veut faire trois fois aussi grand que le modèle. Si, d'autre part, on fait $BG = EF$, et que l'on mène EG, cette ligne sera alors la longueur de l'unité de mesure d'une échelle qui agrandira de quatre fois le modèle. Si l'on continue ce travail et si l'on fait $BH = EG$, alors EH sera la longueur d'une unité de mesure d'une échelle par laquelle on obtient une copie cinq fois plus grande que le modèle. Et ainsi on trouvera l'échelle pour un agrandissement six fois, sept fois, etc., plus grand.

§ 253. *Problème*.— Copier un dessin de manière à le rendre $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, etc., fois plus petit que l'original, fig. 77.

Solution. — Il s'agit aussi de trouver ici la longueur de chaque unité de mesure d'une échelle à l'aide de la quelle on puisse résoudre ce problème. Dans ce but, on mènera une ligne

droite AB et on lui donnera une longueur égale à celle de l'unité de mesure de l'échelle du modèle, on divisera cette ligne au point C en deux parties égales et on décrira de C avec AC au-dessus de AB en demi-cercle. La copie doit-elle maintenant n'être que moitié aussi grande que le modèle? on élèvera alors en C une perpendiculaire CD sur AB, on mènera AD, et cette ligne sera alors une unité de mesure de l'échelle cherchée. Pour faire une copie qui soit le tiers de l'original, on divisera AB en E et F en trois portions égales, on élèvera en E une perpendiculaire EG sur AB, on mènera AG, et on obtiendra par là la longueur de chaque unité de mesure de l'échelle demandée. Si l'on divisait AB en quatre portions égales, de telle sorte que $AH = \frac{1}{4} AB$, si l'on élevait en H sur AB la perpendiculaire HK et si on menait AK, alors cette ligne donnera la longueur d'une unité de mesure de l'échelle d'un dessin qui serait le quart de l'original, etc.

§ 254. — *Problème.* — Déterminer l'échelle à l'aide de laquelle la surface de la copie soit, avec celle du modèle, dans un rapport déterminé, par exemple, comme 3 est à 7, fig. 78.

Solution. — On décrira sur AB, fig. 78, qui doit être la longueur de l'unité de mesure de l'échelle du modèle, un demi-cercle, on divisera AB en sept portions égales, on élèvera en C, qui est le point d'extrémité de la troisième portion, une perpendiculaire CD sur AB, l'on mènera AD, et cette ligne donnera la longueur d'une unité de mesure de l'échelle cherchée (1).

(1) La preuve de cette solution et celle des deux § précédents ne sera pas difficile à faire à l'aide de la géométrie, si l'on songe que la copie et le modèle sont deux figures semblables et que les surfaces de deux figures semblables sont entre elles comme les carrés de leurs côtés homologues, et par suite, comme les carrés des échelles respectives. Ainsi, par exemple, dans la fig. 76, $x^2 = 2a^2$; si maintenant on fait la surface de l'original $= Q$ et celui de la copie $= q$, alors $Q : q = a^2 : x^2$, par suite $Q : q = a^2 : 2a^2$, c'est-à-dire $Q : q = 1 : 2$; ainsi donc $q = 2Q$, de même $y^2 = 3a^2$, parce que $BF = 2a^2$ et ainsi $Q : q = a^2 : 3a^2$, c'est-à-dire $Q : q = 1 : 3$, ainsi $q = 3Q$ et ainsi de suite. Par le calcul, on aurait trouvé $x = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$, de

§ 255.— On ferait une grande faute si, dans la réduction des échelles, on voulait partager l'unité de mesure de l'échelle de l'original en deux, trois, quatre, etc. parties, ou prendre deux, trois, quatre, etc., de ces unités pour donner à la copie un rapport proportionnel deux, trois, quatre fois plus grand ou plus petit que n'est l'original lui-même. En effet, si on prenait, pour obtenir une copie qui, par exemple, devrait devenir quatre fois plus grande que l'original, quatre fois l'unité de mesure de l'échelle de l'original, et si on employait cette ligne quatre fois plus grande, comme une unité de mesure de l'échelle de la copie, celle-ci ne serait pas quatre fois, mais $4^2 = 16$ fois plus grande que ne l'est l'original. Si, effectivement, la copie devait être faite quatre fois plus grande que l'original, cela ne veut pas dire que chaque mesure de longueur de la copie soit à peu près quatre fois plus longue que celle de l'original, mais que toute la figure de la copie, c'est-à-dire que sa surface soit faite quatre fois aussi grande que l'original. Le même raisonnement est applicable lorsqu'il s'agit de diminuer un dessin.

---

même $y = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$, d'autre part $Z = \sqrt{4a^2} = 2a$ et ainsi de suite.

Si on met dans le § 253, fig. 77, $AB = a$ et $AD = x$, alors $a : x = x : \frac{a}{2}$, ainsi $x^2 = \frac{a^2}{2}$, ainsi $Q : q = a^2 : \frac{a^2}{2}$, c'est-à-dire $Q : q = z : 1$, par suite $q = \frac{1}{2}Q$. Si on met, d'autre part, $AG = y$, alors $a : y = y : \frac{a}{3}$, conséquemment $y^2 = \frac{a^2}{3}$, ainsi $Q : q = a^2 = \frac{a^2}{3}$, c'est-à-dire $Q : q = 3 : 1$, ainsi $q = \frac{1}{3}Q$. Par le calcul on aurait trouvé $x = \sqrt{\frac{a^2}{2}} = a\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ $y = \sqrt{\frac{a^2}{3}} = a\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ $Z = \sqrt{\frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}$.

Si dans le § 254, fig. 78, on met que $AB = 7$ et $AD = x$, alors $7 : x = x : 3$, ainsi $x^2 = 21$ — comme, dans cet exemple, $Q : q = 7^2 : x^2$, alors $Q : q =$ aussi $49 : 21$, c'est-à-dire $Q : q = 7 : 3$. Par le calcul, on trouve $x = \sqrt{21}$.

TROISIÈME PARTIE.

DE LA DISTRIBUTION DE LA LUMIÈRE ET DES OMBRES SUR LES DESSINS.

CHAPITRE Ier.

Définitions et notions.

§ 256. — C'est à l'aide de la *lumière* que l'œil prend connaissance des corps; l'absence de la lumière est l'*obscurité;* en effet, les fonctions de l'œil cessent, puisque dans ce cas il ne reçoit plus aucune impression. Un corps soumis à l'influence de la lumière est *éclairé*, et alors l'œil peut acquérir la connaissance de son développement, de sa forme, de sa couleur et de sa position.

§ 257. — Dans la distribution de la lumière sur un corps on a trois choses à considérer, premièrement le *corps éclairé*, deuxièmement le *corps éclairant*, troisièmement la *transmission* de la lumière. Par la combinaison de ces trois choses et par l'application des effets qu'ils produisent, on obtient ce que, dans un dessin, on appelle une distribution exacte de la lumière et des ombres, et on peut, par leur application dans le dessin, obtenir sur une surface plane l'image exacte des corps.

§ 258. — Les hypothèses admises jusqu'à ce jour pour expliquer la nature de la lumière et ses effets ont toutes plus ou moins de vraisemblance. Quoi qu'il en soit, il est bien établi que l'on peut, premièrement, se représenter la lumière comme étant composée d'une infinité de rayons partant d'un corps éclairant, et qui vont en divergeant comme les rayons d'une

dans un point quelconque de son trajet, par la présence d'un corps opaque, il se formera à la partie postérieure de ce corps, c'est-à-dire au côté opposé à celui qui est frappé par la lumière, une certaine obscurité dans l'espace, c'est ce que l'on nomme une *ombre*. Cette ombre se distingue de l'obscurité de laquelle il a été fait mention au § 256, en ce qu'elle peut être envisagée comme étant une *absence partielle de lumière* ou une obscurité circonscrite par la lumière. Il résulte de là que l'idée que l'on doit se faire de l'ombre dépendra de celle qu'on a de la lumière ; en effet, s'il existe en un point de la lumière, il ne s'en suit pas que nécessairement il y ait aussi de l'ombre, mais la présence de l'ombre présuppose toujours un effet de la lumière.

C'est par la lumière et l'ombre que dans la nature l'œil peut reconnaître la forme des corps, distinguer l'une de l'autre celles des surfaces de ces corps qui sont planes, courbes ou brisées, comme aussi les élévations ou enfoncement qui s'y trouvent. Si donc dans un dessin on veut, dans le but de figurer un corps le plus exactement possible, produire les effets de la lumière, ceux-ci devront alors être conformes à ce qui s'observe dans la nature même; par suite on devra étudier les lois d'après lesquelles ils sont produits. Or, comme il sera facile de déterminer sur un dessin ces effets de la lumière, lorsqu'on connaît les ombres; il s'ensuivra qu'il est très important de savoir bien déterminer les ombres, et que cette étude doit être envisagée comme une des parties les plus essentielles du dessin en général.

§ 262. — Si maintenant l'on admet *que le corps opaque situé dans l'espace*, dont il a été question dans le paragraphe précédent, soit la sphère AMBL (*fig.* 79) se trouve éclairé par des rayons lumineux parallèles marqués par K, et que d'autre part EFGH soit un plan dessiné en perspective cavalière ; on pourra alors se représenter, que si un de ces rayons lumineux, par exemple KC, courant autour de la sphère parallèlement à lui-même pour revenir à son point de départ, il décrira une surface cylindrique qui enveloppera la sphère, et sur laquelle doivent se trouver tous les rayons lumineux

lune, parce que les rayons du soleil sont arrêtés par l'interposition de la terre entre le soleil et la lune et qu'ils ne peuvent ainsi éclairer qu'une partie de cet astre.

Remarque. — On peut se représenter en quelque sorte l'ombre portée comme une surface mathématique, puisqu'elle se développe en longueur et en largeur, et puisqu'elle peut être mesuree et ne possède pas d'épaisseur. Les explications qui se rapportent à une surface mathématique qui n'a que longueur et largeur lui sont donc tout-à-fait applicables.

§ 263. — Dans la distribution de la lumière et des ombres sur un dessin géométrique, on ne considère que deux genres d'ombres; savoir, l'*ombre* et l'*ombre portée*, et on peut en quelque sorte envisager l'ombre portée comme étant la projection de l'*ombre* (*fig.* 13). Ainsi, dans la fig. 79, la courbe CD est non-seulement la projection de la sphère AMBL sur le plan EFGH, mais aussi la projection d'un plan opaque AB. De même la courbe CD peut être envisagée comme étant la projection de l'ombre de tout autre corps rencontré par les rayons lumineux suivant une courbe AB.

Tout objet qui se trouve situé entre l'ombre et l'ombre portée, c'est-à-dire dans la pénombre ou dans le cylindrique d'ombre ACDB, est dans l'ombre soit en entier, soit en partie seulement, suivant qu'il sera enveloppé en entier ou partiellement par lui.

§ 264. — D'après ce qui vient d'être dit sur la distribution exacte et naturelle des lumières et des ombres sur un dessin, il y a trois choses à considérer ; savoir : premiérement, comment il faut représenter la *lumière* avec ses gradations sur les faces frappées par les rayons lumineux ; deuxièmement, où et comment apparaît l'ombre, et comment on parvient à trouver la ligne de séparation d'ombre et de lumière; et troisièmement, comment on détermine le contour de l'ombre portée, et enfin quelles teintes il faut donner aux ombres en général et dans chaques cas en particulier.

§ 265. — Si l'on admet que les rayons lumineux, comme dans la fig. 80, partent d'un point lumineux K, ils éclaireront une partie plus petite que la moitié de la sphère AMBL, la portion obscure ALB qui se trouve dans l'ombre sera alors plus

grande que dans la fig. 79, et les rayons lumineux qui sont en contact avec la sphère formeront le cône droit, dont le sommet est le point lumineux K, et dont la base est l'ombre portée de forme circulaire CD, qui devient de plus en plus grande selon que le plan EFGH, perpendiculaire à l'axe du cône, s'éloigne davantage de la sphère, ou que le point K se rapproche davantage de celle-ci.

§ 266. — Si, d'un autre côté, les rayons lumineux frappent de telle sorte qu'ils convergent vers la sphère, comme dans la fig. 81, la portion éclairée de la sphère sera alors plus grande que la portion ALB qui se trouve dans l'ombre. Mais l'ombre portée CD, qui par l'effet de cette lumière tombe sur l'axe de ce cône placé perpendiculairement sur le plan EFGH sera d'autant plus petite que le plan s'éloignera davantage de la sphère, jusqu'à ce qu'enfin elle disparaisse complètement lorsque le sommet N de ce cône viendra tomber entre la sphère et le plan.

§ 267. — D'après le § 260, la lumière qui éclaire les objets que l'on veut figurer à l'aide d'un dessin géométrique, est sensée partir du soleil, et quoique cet astre ne soit pas à une distance illimitée de la terre, il en est cependant assez éloigné pour qu'il ne puisse plus être question de divergence ou convergence des rayons lumineux dans leur rapport avec les corps terrestres. Ces rayons lumineux devront plutôt être envisagés comme étant des lignes droites parallèles entre elles, ainsi que leurs projections sur un dessin : aussi les règles et les lois pour les constructions seront établies conformément à cela.

§ 268. — Mais outre ce parallélisme des rayons lumineux, il y a encore à tenir compte de l'angle sous lequel ils arrivent, frappent et éclairent un objet; mais il n'y a pas lieu ici de rester resseré dans les limites dont il est fait mention dans le § 56 et suivants. Si alors on a dit que pour la représentation d'un dessin géométrique les rayons visuels doivent toujours frapper perpendiculairement la surface d'un plan, on cherche ici au contraire, à donner, dans le plus grand nombre des cas, à ces rayons lumineux, non-seulement une inclinaison par rapport à l'objet à figurer, mais encore par rapport à la surface sur laquelle il est représenté : de telle sorte que ces rayons

lumineux se trouvent ordinairement complétement situés hors de la direction des rayons visuels et n'ont rien de commun avec eux par rapport à leur position, qu'ils n'*éclairent* enfin le corps qu'autant qu'il est rencontré par les rayons visuels (§ 258).

On fera voir dans la suite l'influence essentielle que cet angle des rayons lumineux exerce sur la distribution des lumières dans un dessin, et celle de la gradation de la lumière sur la ligne de séparation d'ombre et de lumière, sur sa forme et sur la position de l'ombre portée, telles qu'elles apparaissent sur les objets eux-mêmes, et par suite, sur leur image.

CHAPITRE II.

—

De la distribution de la lumière et des ombres sur des surfaces planes et des surfaces courbes, ainsi que de sa réflexion.

§ 269. — Si l'on envisage les propriétés physiques des rayons solaires sous le rapport de la chaleur et de la lumière, on ne tarde pas à reconnaître une certaine coïncidence entre leurs effets. Ainsi ces rayons échaufferont d'autant plus la terre que l'angle sous lequel ils viendront frapper sa surface s'approchera davantage de l'angle droit, et d'autre part, ils éclaireront d'autant plus une surface, que l'angle suivant lequel ils la frappent se rapprochera aussi davantage de l'angle droit. Comme le dessinateur n'a intérêt à connaître que cette seconde propriété des rayons solaires, ce sera donc de celle-ci que nous aurons à nous occuper plus spécialement.

§ 270. — Soit AB (*fig.* 82) la section d'une surface horizontale AFEB, frappée normalement par des rayons lumineux L, L, L... parallèles entre eux, et qui produisent par

suite sur elle une certaine lumière. Si l'on admet que le plan se meut autour du côté A F figuré par le point A, de telle sorte qu'il prend successivement la position de A B', A B'' et A B''', il sera alors évident que dans ces différentes positions ce plan recevra une quantité de lumière déterminée par sa projection A C, A D et A, que par suite la lumière sera d'autant plus faible que l'angle α que le plan fait avec le plan horizontal sera plus grand, et qu'enfin celle-ci disparaîtra complètement lorsque le plan A B''' formera un angle droit avec le plan A B; comme, d'un autre côté, la lumière devra être la plus intense sur le plan A B lorsque les rayons lumineux l'atteindront perpendiculairement, parce que, dans ce cas, il est frappé à la fois par tous les rayons lumineux L, L, L... Si, d'autre part, on admet que A B soit la projection d'une surface rectangulaire A F E B avec le côté a, les intensités de la lumière sur le plan A B et sur le plan AB' seront dans le même rapport que la surface du plan A B à celle de la projection AB', c'est-à-dire comme $a^2 : a$ cosin. α, ou comme a : cosin. α, ou comme A B : A C. C'est aussi pourquoi la quantité de lumière de A B sera à celle de A B'' comme A B : A D, comme la lumière de A B est à celle sur A B''', comme a^2 : a cosin. α, ou comme a : cosin. 90°, ou comme a : 0, ou comme A B : 0; c'est-à-dire que l'intensité des rayons lumineux L, L, L... sera nulle. Comme maintenant l'angle β que les rayons lumineux forment avec ces plans, est le complément de l'angle α, et que par suite cet angle devient d'autant plus petit que l'angle α est plus grand ; on pourra dans les rapports précédents remplacer cosin α par le sin. β, et obtenir la loi suivante pour la distribution de la lumière :

La lumière sur un plan sera la plus grande lorsque les rayons lumineux le frapperont normalement, et elle diminuera d'autant plus que l'angle sous lequel les rayons lumineux qui viennent frapper ce plan s'éloigneront davantage de l'angle droit; enfin la lumière disparaîtra complétement lorsque cet angle sera devenu égal à 0, c'est-à-dire lorsque les rayons lumineux se dirigeront parallèlement à ce plan.

Si l'on se représente un prisme entièrement formé de rayons lumineux et qui soit coupé suivant différentes directions, par des plans qui lui sont perpendiculaires et obliques,

plans que nous représenterons par les lignes A B′ et A B″ (*fig.* 82) prolongées jusqu'en G et H ou jusqu'au dernier rayon lumineux à droite; il sera alors évident que le plan A B qui est perpendiculaire aux rayons lumineux et qui est plus petit que le plan A B′ ou A B″ prolongé, mais qui *reçoit la même quantité de lumière*, devra aussi être plus éclairé que A B′ ou A B″, parce que la même quantité de lumière est bien plus concentrée sur lui que sur A G et bien plus encore que sur A H. Il découle aussi de ceci que le plan A B‴ qui se trouve dans la direction des rayons lumineux ne peut recevoir aucune lumière et doit conséquemment être complètement situé dans l'ombre. Par cet examen on se convaincra encore de la vérité de la loi que nous venons de poser.

Si l'on voulait exprimer par un rapport numérique la diminution de la lumière sur ces différents plans, et si, par exemple, on admettait que A B fût partagé en 12 portions; alors FB sera $\frac{12}{12}$ ou la totalité de la lumière, FC seulement $\frac{10}{12} = \frac{5}{6}$ de la lumière, FD seulement $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ de la lumière, et enfin FA $\frac{0}{12}$, c'est-à-dire lumière nulle.

§ 271. — Si l'on peut voir par ce qui précède, quelle est la voie que l'on a à suivre, lorsqu'il s'agit de rendre sur un dessin, les effets de la lumière à l'aide de l'encre de Chine, on devra toutefois tenir compte de quelques exceptions; ainsi, par exemple, il est très essentiel de pouvoir déterminer la quantité de lumière qui frappe l'œil d'après les lois de la katoptrique, et de savoir comment, après cela, on peut reproduire cette lumière sur un dessin. Il pourrait se faire encore qu'une surface éclairée sur laquelle les rayons lumineux tombent moins perpendiculairement que sur une autre, apparaisse cependant plus éclairée si, d'après sa position, elle réfléchit vers l'œil de l'observateur une plus grande quantité de lumière que la première. De même la teinte propre des surfaces peut présenter une exception lorsque, par exemple, la teinte de l'une est bien plus claire que celle de la seconde On verra plus loin quelle influence ceci peut avoir sur la distribution de la lumière et des ombres dans un dessin.

§ 272. — Soit *abcdefghi*, (*fig.* 83), la projection horizontale d'un prisme droit sur laquelle les rayons lumineux *m*, *m*, *m*

forment des angles droits avec le plan élevé en *cd*; d'après le paragraphe précédent, ce sera sur ce plan que la lumière sera la plus intense. Au contraire, sur le plan *de* où l'angle devient plus aigu, la lumière sera plus faible et elle décroîtra toujours davantage en atteignant les plans *cf* et *fg* jusqu'à ce qu'elle disparaisse entièrement sur le plan *gh*, attendu que les rayons lumineux sont parallèles à ce plan et ne peuvent plus l'atteindre; les plans élevés en *hi* et *ia* se trouveront également dans l'ombre. Le plan élevé en *bc* se trouvera moins éclairé que celui élevé en *cd* par le motif donné pour *de*, et le plan élevé en *ab* le sera moins que celui qui est élevé en *bc*. Les limites de l'ombre sont données par les arêtes du prisme situés au-delà de *a* et *g*, car les plans élevés en *ab* et *fg* se trouveront toujours dans la lumière tant que les rayons lumineux les atteindront, quelque petit que soit l'angle, et par suite, quelque faible que soit aussi la lumière qui les éclaire.

§ 273. — Si l'on se représente la projection verticale d'un prisme dont la fig. 83 serait la projection horizontale, voici alors comment la lumière se distribuera : les faces dont *ab*, *bc*, *cd* sont les bases se distingueront nettement les unes des autres, de telle manière que par la lumière et par ses nuances on pourra déjà reconnaître les limites où l'une des surfaces se termine et où la suivante commence. Plus les angles du polygone seront petits, plus cette différence sera apparente et *vice versa*, de telle sorte que dans le cas où les angles d'un polygone sont très grands, la différence de lumière entre deux faces contiguës est fort difficile à apprécier et à exprimer. Ceci nous mène immédiatement à parler de la distribution de la lumière sur *une surface convexe*.

En effet, si l'on peut se représenter une ligne courbe comme étant une ligne brisée, formée d'une multitude de côtés, on devra de même considérer une surface courbe comme la réunion d'une multitude de surfaces planes. Par ce motif, dans la distribution de la lumière sur leurs surfaces, les teintes de chacune d'elles ne se distingueront pas suffisamment les unes des autres; on pourra bien reconnaître la dégradation totale de la lumière sur toute la surface, mais non pas les limites des différentes teintes, et on aura surtout de la peine pour les figurer dans le dessin.

Ce que l'on vient de dire d'un polygone irrégulier, s'applique également à un polygone régulier, par conséquent aussi à une ligne circulaire et à une surface cylindrique.

§ 274. — On enseigne dans l'optique que l'intensité de la lumière sur les surfaces où sa force décroît, en raison inverse du carré des distances, c'est-à-dire que la lumière sur les surfaces décroît comme le carré de leur distance augmente; qu'ainsi une surface qui est à une distance cinq fois plus grande qu'une autre surface du corps lumineux, sera aussi $5^2 = 25$ fois moins éclairée que celle-là.

Toutefois cette loi n'existe dans la nature et trouve son application à un dessin que dans les cas où l'on suppose que la lumière part d'un corps lumineux situé sur la terre, comme par exemple, d'un flambeau, d'une bougie. Mais pour un dessin où l'on suppose la lumière arrivant du soleil, les surfaces les plus éloignées devront, d'après cette loi, être aussi éclairées que celles qui sont les plus rapprochées, parce que la distance du soleil à la terre est trop grande pour que les faibles distances des objets situés à la surface de la terre puissent avoir une influence sur l'intensité de la lumière.

§ 275. — Malgré cela, dans les cas où l'on admet le soleil comme corps éclairant, *on donnera aux parties placées en avant une teinte plus claire qu'à celles situées en arrière*, de telle sorte que sur celles-ci la lumière apparaisse moins intense que sur celles-là, quand même elles auraient l'une et l'autre une même direction par rapport aux rayons lumineux.

La cause de ceci, c'est que : premièrement, la lumière qui est renvoyée par des surfaces très éloignées et qui arrive à l'œil, se disperse dans toutes les directions et perd son intensité suivant le carré des distances; qu'en second lieu, il se trouve entre les parties les plus éloignées et l'œil un grand nombre de couches d'air, les rayons visuels ayant à traverser une masse d'air bien plus grande sont affaiblis et ne peuvent plus distinguer aussi nettement les objets, surtout lorsqu'on songe qu'une grande masse d'air n'est pas sans coloration, et que les objets apparaissent par suite plus ternes, plus pâles, moins éclatants et surtout moins distincts. Si la distance est encore plus grande, les objets deviendront toujours moins distincts, et il arrivera

un instant où l'on aura de la peine à distinguer les unes des autres, les lumières et les ombres, car les parties éclairées apparaîtront alors plus sombres, et les parties qui sont dans l'ombre plus éclairées; ils finiront par se confondre, ils prendront la coloration de l'air et disparaîtront complétement à la limite.

§ 276. — La partie de l'art du dessin qui traite tout spécialement ce sujet, se nomme la *perspective aérienne* par opposition à la *perspective linéaire*. Elles se distinguent l'une de l'autre en ce que cette dernière traite simplement de la dégradation de la lumière et des ombres, du choix des couleurs les mieux appropriés et de la représentation des corps, suivant les distances où ils sont placés; c'est aussi pourquoi on se sert pour figurer, dans la perspective linéaire, les distances et les rapports dans lesquels sont les objets, de constructions géométriques, c'est-à-dire de lignes droites et courbes.

§ 277. — Quoique dans les dessins appliqués aux arts on ait rarement à représenter des parties situées les unes derrière les autres et à des distances très grandes, que conséquemment il n'est presque jamais question des modifications que subit la distribution de la lumière par les deux causes indiquées au § 275, néanmoins la règle indiquée dans le même paragraphe devra être appliquée en ce qu'elle procure un moyen très sûr et très commode de distinguer et de séparer d'une manière facile les surfaces placées en arrière, de celles qui sont plus en avant. C'est là aussi la raison pour laquelle cette règle a été adoptée pour la distribution de la lumière et des ombres sur les dessins appliqués aux arts; dans ces dessins, les parties les plus rapprochées recevront donc des teintes plus claires que celles qui sont plus éloignées; celles-ci devront toujours être maintenues plus foncées, eu égard à leur distance.

§ 278. — Si d'après cela l'image représentée en A (*fig.* 73) doit avoir en projection horizontale la forme de B, il faudra alors que la surface *nors*, fig. 84, soit maintenue moins sombre que les deux surfaces *mnst* et *opqr* lesquelles sont toutes deux plus éloignées que celle-ci. Si, au contraire, la projection horizontale a la forme dessinée en C, fig. 73, il faudra alors que la surface *nors*, fig. 85, reçoive des

teintes plus sombres que les deux surfaces *mnst* et *opqr*, parce que ces dernières seront plus rapprochées de l'œil que la première.

Comme, d'ailleurs, dans les fig. 84 et 85 toutes les surfaces sont parallèles avec la surface du tableau et reçoivent la même quantité de lumière, elles recevront alors une même teinte plate, comme cela a toujours lieu. Car il n'y a pas de raison pour que la teinte qu'on applique soit plus foncée sur un point que sur un autre, puisque les rayons lumineux qui les frappent le font sous des angles égaux, et que chaque point de ces surfaces se trouve situé sur un plan parallèle avec la surface du tableau.

Si la surface du milieu se trouve à égale distance des deux surfaces voisines, alors ces deux dernières se trouveront sur un même plan et recevront par suite la même teinte. Si, au contraire, cette distance n'est pas égale, alors le plan le plus éloigné recevra une teinte plus foncée et *vice versa*.

§ 279. — Si *a,b,c,d*, fig. 86, sont les projections de surfaces parallèles entre elles, ainsi qu'au plan vertical, et si *l,l,l*... indiquent la direction des rayons lumineux qui les éclairent, alors, d'après ce qui vient d'être dit, le plan D sera comme étant le plus rapproché de l'observateur, le plus éclairé, le plan A, au contraire, sera dans ce cas ci le moins éclairé; chacun des quatre plans devra recevoir une teinte uniforme, et leurs limites seront marquées sur la projection verticale d'une manière précise et bien déterminée. Si, au contraire, les plans *a,b,c,d*, etc., sont excessivement petits, ainsi que les distances qui les séparent, on pourra bien encore teinter davantage ceux qui sont les plus éloignés, mais alors les limites respectives ne pourront plus être déterminées d'une manière aussi nette. Si, enfin, ces plans et les distances qui les séparent sont tellement petits qu'on puisse les considérer comme placés sur une même ligne droite *ef*; alors le plan EF, quoiqu'il soit par sa position même et à cause du parallélisme des rayons lumineux complétement éclairé; sera maintenu malgré cela, dans le dessin, plus teinté en EE qu'en FF, et devra être dégradé insensiblement de EE à FF, de telle sorte qu'on puisse bien distinguer la dégradation de la lumière vers FF, mais con-

staler en aucun point le passage distinct d'une teinte à une autre.

§ 280. — Nous déduirons de ce qui précède la règle suivante : si un plan éclairé est incliné vers le tableau, il ne devra pas recevoir une teinte uniforme, mais, au contraire, être lavé de telle sorte que la portion la plus éloignée de l'observateur soit la plus teintée. Le plus ou le moins d'inclinaison des plans vers le tableau pourra donc, en général, être rendu sur un dessin, à l'aide d'un lavis et par la dégradation des teintes ; toutefois cela ne pourra se faire avec une précision telle qu'on puisse, comme dans le dessin de situation, constater le degré de l'inclinaison, parce qu'on rencontre par trop de difficultés pour conserver partout la teinte nécessaire pour telle ou telle inclinaison.

En général, on devra se rappeler que plus l'angle α (*fig.* 85) sera petit, moins la teinte de E E se distinguera de celle de F F, et plus cet angle sera grand, plus la différence entre ces deux teintes sera sensible.

§ 281. C'est ainsi que la fig. 73, A, décrite dans le § 236, devra être lavée comme on le voit dans la fig. 87, si elle avait en projection horizontale la forme de la fig. D, et si les deux surfaces inclinées étaient encore frappées par les rayons lumineux ; il n'y aura que cette différence, c'est que *opqr* sera maintenu plus clair que *m u s t*, ainsi que cela résulte de la direction des rayons lumineux. Cette figure, ainsi que les fig. 84 et 85, serviront à justifier ce que nous avons dit à la fin du § 237.

§ 282. — Une surface qui n'est pas par elle-même un corps éclairant, peut le devenir si elle est éclairée par une lumière quelconque qu'*elle réfléchit* suivant un degré plus ou moins grand (§ 258). Sous ce rapport, elle pourra être considérée non-seulement comme une surface éclairée, mais même, en quelque façon, comme une surface éclairant en tant qu'elle éclaire, plus ou moins sensiblement, d'autres surfaces, et en particulier celles qui ne sont pas directement frappées par les rayons lumineux. La lumière qui est le résultat de cette réflexion des rayons lumineux d'une surface éclairée, se nomme *lumière de réflexion* : et l'on donne le nom de *reflet* à la

lumière que celle-ci produit sur d'autres surfaces Par suite, si on peut se représenter la lumière qui est produite par un corps éclairant, comme étant *une lumière directe*, on devra considérer comme étant *une lumière indirecte* celle qui résulte de la réflexion de la lumière par une surface éclairée.

§ 283. — Or, d'après les lois de la catoptrique, la lumière est réfléchie par les surfaces éclairées, sous le même angle suivant lequel elle arrive, c'est-à-dire que si on se représente de nouveau la lumière comme composée d'une multitude de rayons lumineux, l'*angle de réflexion de ces rayons lumineux est égal à l'angle d'incidence*, de telle sorte que la ligne droite qui représente le rayon lumineux qui arrive directement, se trouve toujours avec celle qui représente le rayon lumineux réfléchi dans un même plan.

Soit *a b* (*fig.* 88) la projection d'une surface opaque qui se trouve directement éclairée par les rayons lumineux parallèles *d c*, *d' c'*, *d" c"*..... Ces rayons lumineux qui frappent la surface suivant les angles *d c a*, *d' c' a*, *d" c" a*... seront réfléchis sous les mêmes angles *f c b*, *f' c' b*, *f" c" b'*, et iront frapper et éclairer une surface dont la ligne *g h* est la projection. Plus le plan opaque *a b*, qui est frappé par la lumière, sera uni, poli et aura une couleur claire, plus la réflexion sera régulière et parfaite, et plus la lumière réfléchie sera sensible sur *g h*. Ce qu'il y a de certain, c'est qu'une portion de la lumière est toujours absorbée par le plan *a b*, et que conséquemment le plan *g h* sera plus terne que *a b*, mais restera encore toujours suffisamment éclairé. Si aux points *c*, *c'*, *c"*.... on élève sur *a b* des perpendiculaires, il sera évident que *d c e* devra être égal à *e c f*, *d' c' e'* = *e' c' f'*, etc., on devra également tenir compte de ces angles dans le dessin.

§ 284. — Si le plan dont *g h* est la trace a, relativement à *a b*, une position telle que les rayons lumineux réfléchis frappent ce dernier perpendiculairement, alors la lumière réfléchie sur ce plan sera plus intense que si elle arrivait suivant un angle aigu ou obtus. Mais il sera toujours éclairé par cette lumière, quelle que soit d'ailleurs sa position, pourvu qu'il puisse encore être atteint par eux ; et ici on pourra de nouveau appliquer ce qui a été dit de l'influence de la lumière di-

recte, telle qu'elle se produit dans la nature et de la manière de la rendre dans un dessin.

Toutefois nous ferons encore remarquer ici, que c'est dans la direction des rayons réfléchis (*fig.* 88), qu'une surface éclairée répandra *le plus de lumière;* elle donnera néanmoins un reflet sur les points qui ne se trouvent pas dans ladite direction, et elle éclairera de cette manière plus ou moins tout l'espace environnant; on pourra se convaincre journellement de cet effet de la lumière sur les corps, parce que les surfaces, telles qu'elles s'offrent dans la nature, sont très rarement bien unies, mais sont composées, dans le plus grand nombre des cas, d'une multitude de petites aspérités et de creux. Ces aspérités, quelque petites qu'elles soient d'ailleurs, rendent la réflexion irrégulière, attendu qu'elles éparpillent une portion de la lumière réfléchie, et absorbent une partie des rayons lumineux réfléchis.

Si, par exemple, *h* et *k* (*fig.* 88) figurent de semblables petites aspérités et creux (pour plus de clarté on a exagéré ici leurs dimensions), alors les rayons lumineux *lh* parallèles avec *cd* seront réfléchis vers *hm*, de même que les rayons lumineux *ok* seront réfléchis vers *kq*, parce que chaque fois l'angle *lhm* doit être égal à *nhm* et *okp* à *pkq*.

§ 285. — La réflexion des rayons lumineux exige, même lorsqu'il s'agit de distribuer la lumière sur un dessin géométrique, que l'on tienne compte de la position de l'observateur ou la direction des rayons visuels. Car dans la nature, et par suite dans un dessin, la surface sur laquelle les rayons lumineux réfléchis arrivent à l'œil suivant la direction des lignes visuelles, apparaîtra bien plus éclairée qu'une autre pour laquelle cette condition ne sera pas remplie, quand même celle-ci recevrait la lumière sous un angle plus droit, ou était plus rapprochée de l'observateur, ainsi que nous l'avons déjà dit dans le § 271.

§ 286. — Plus la surface d'un corps est unie et polie, plus la réflexion est parfaite, et c'est à cause de cela qu'on ne peut quelquefois pas distinguer les objets figurés sur un tableau, parce que la lumière est trop intense et éblouit l'observateur. Si ce dernier se trouve, par exemple, placé devant un tableau

ou devant toute autre surface polie, de telle sorte que les rayons lumineux qui les éclairent viennent en se réfléchissant se confondre dans ses rayons visuels; il lui sera alors impossible de rien distinguer à cause de la trop grande intensité de la lumière; et il se trouvera dans la nécessité de changer de position s'il tient à prendre une connaissance exacte de l'image qui se trouve sur le tableau. Cette lumière, dite *lumière brillante*, se manifeste chaque fois que les rayons lumineux se réfléchissent suivant les rayons visuels.

§ 287. — Parmi les surfaces polies et de même composition, ce sera celle qui aura une couleur blanche qui réfléchira le plus de lumière, et ce sera celle qui aura une couleur noire qui en absorbera le plus et qui donnera une réflexion faible ou nulle. Plus donc la couleur propre d'un corps se rapprochera du blanc, ou plus elle deviendra claire, plus aussi la lumière réfléchie sera intense, et *vice versa*. On pourra encore reconnaître, par la réflexion de la lumière, la couleur de la surface qui reflète; une surface jaune, par exemple, produira un reflet jaune, une surface rouge un reflet rouge; et la clarté plus ou moins grande de la couleur réfléchie dépendra de l'intensité de la la lumière sur la surface réfléchissante.

§ 288. — On comprendra que si on s'astreignait à suivre rigoureusement toutes ces règles, on se perdrait dans un dédale de difficultés, et qu'un dessin géométrique qui exige surtout de la clarté, de la simplicité, perdrait ces avantages. En effet, en remontant aux causes qui déterminent la réflexion, il est aisé de voir qu'une image, pour être conforme à ce qui se voit dans la nature et pour satisfaire aux exigences de la théorie, est soumise, sous le rapport de sa position et de l'intensité de la lumière, à des conditions très différentes; ainsi, comme nous l'avons déjà dit, cela dépendra :

1° De la position de la surface réfléchissante. En effet, chaque fois qu'on changera cette position, la réflexion changera de direction, comme on peut le faire voir à l'aide d'un miroir. D'après cela, le lieu de la lumière réfléchie ne pourra donc être déterminé d'une manière générale;

2° En ce que l'intensité de la lumière réfléchissante dépendra de la composition des surfaces réfléchissantes, de leur poli,

de leur couleur et du degré de leur opacité, puisque des surfaces mates et peu transparentes réfléchissent moins de lumière que des surfaces claires, polies et nullement transparentes;

3° De l'angle d'incidence qui aura aussi une grande influence sur l'intensité et le genre de réflexion;

4° Si l'on remarque dans la nature que les surfaces, même éclairées par une lumière réfléchie, produisent une réflexion, surtout lorsque cette lumière est très intense ou que ces surfaces ont une couleur propre très brillante, il en résulte qu'il y a réflexion par réflexion.

Donc, dans la détermination des réflexions sur un dessin géométrique, il est nécessaire d'admettre certaines restrictions aux lois suivant lesquelles la lumière est réfléchie, si l'on ne veut être exposé à ne pouvoir atteindre le but que l'on se propose. La suite va nous enseigner comment on arrivera à une réflexion exacte, comment on devra la choisir, et comment on la figurera dans un dessin.

On devra nécessairement tenir compte des circonstances différentes qui modifient les réflexions dans les dessins de perspective, et surtout dans les tableaux que l'on colorie, car il s'agit ici de donner à l'objet une ressemblance aussi exacte que possible avec ce qui s'observe dans la nature.

§ 289. — Il faut, en outre, remarquer que les reflets peuvent aussi beaucoup varier, parce qu'ils dépendent en partie de la composition des corps éclairants. Dans les dessins géométriques, au contraire, pour lesquels on admet la lumière du soleil comme arrivant d'une distance infinie, on n'a qu'à s'occuper de la réflexion de cette lumière sans tenir compte de la composition de cet astre.

§ 290. — Cette propriété (mentionnée au § 284), qu'ont les surfaces éclairées de réfléchir la lumière, non-seulement suivant une seule direction, mais d'éclairer, en outre, plus ou moins, tout l'espace ambiant, par le reflet, procure aussi le moyen de connaître positivement la position, la forme et la couleur des objets que la lumière directe n'éclaire pas, ou qui se trouvent placés dans l'ombre. Ainsi, par exemple, quand la lumière du soleil éclaire un appartement; le plancher qui la reçoit, éclairera non-seulement le mur situé en face de

la fenêtre, mais encore le plafond et même le mur de la fenêtre. A la vérité, par cette réflexion, ce sera le premier qui sera éclairé avec le plus de force, le plafond le sera moins, et enfin le mur de la fenêtre le sera le moins de tous. C'est encore par ce motif qu'on ne remarquera pas sur les objets situés dans l'ombre une teinte uniformément sombre, mais on y distinguera des nuances qui seront, suivant les cas, plus ou moins marquées, et c'est pour atteindre ce but qu'il faudra maintenir dans les parties ombrées d'un dessin, suivant la position et la forme de chaque surface, et suivant la manière qu'elles reçoivent la lumière réfléchie, la lumière réfléchie tantôt plus mate, tantôt plus vive; d'autrefois, on donnera à la teinte plus de brillant, ou encore on lavera, ainsi que cela a été expliqué pour les parties qui se trouvent dans la lumière. *D'après cela, ce qui, pour les parties éclairées, est la lumière directe, sera pour les parties ombrées, le reflet*; et de même que pour déterminer les différentes teintes des parties éclairées, on est obligé de tenir compte de la direction des rayons lumineux incidents, de la position et de la forme des surfaces éclairées par eux ; de même il faudra avoir égard, pour les parties ombrées, à la direction de la lumière réfléchie et déterminer d'après elle son influence. C'est donc par ces reflets que les parties qui se trouvent dans l'ombre sont éclairées, et c'est à leur aide que l'on parvient à reconnaître exactement leur forme. Or, comme dans la nature ces reflets ne manquent jamais, car l'air, en recevant des rayons lumineux, devient à son tour corps éclairant et produit par suite ces reflets, on devra toujours les marquer sur un dessin. Ils facilitent étonnamment la connaissance d'un objet et aident à rendre un objet figuré sur un tableau, plus conforme à la réalité. On a déjà fait connaître la manière et le moyen de les employer dans un dessin, nous y reviendrons encore plus loin ; il n'y a plus ici qu'à ajouter que la lumière réfléchie apparaît d'autant plus vive que les parties éclairées sont situées plus près des surfaces réfléchissantes, et que par leur position elles peuvent mieux recevoir la lumière réfléchie, et *vice versa*.

§ 291. — L'ombre portée est produite par la direction des rayons lumineux incidents et par leur croisement. Mais ce serait

pousser la chose trop loin si l'on voulait appliquer à la lumière de réflexion cette influence de la lumière directe par rapport aux ombres, c'est-à-dire si l'on voulait admettre que les objets qui se trouvent déjà dans l'ombre, mais qui sont éclairés par un reflet, puissent porter une ombre dans l'ombre, et même dans une direction opposée. Ceci ne s'exécute jamais dans un dessin géométrique; toutefois on maintiendra les points où l'ombre en question doit tomber plus sombres, non pas parce que l'objet porte une ombre, mais parce qu'elle empêche plus ou moins l'influence du reflet sur ces points. A la rigueur, l'effet produit est le même, car l'ombre portée n'est pas autre chose qu'une absence partielle de la lumière directe; mais ce qui établit la différence, c'est que l'on donne à l'ombre portée réelle une forme déterminée à l'aide d'une construction géométrique, et par suite un contour parfaitement tranché; tandis que, pour les autres ombres, cela n'est pas possible. Plus donc l'influence de la lumière réfléchie est affaiblie sur certaines parties d'un corps par des objets situés au-devant de lui ou par d'autres obstacles, plus les ombres paraissent sombres, et de là il résulte que dans les dessins on noircit complètement ou au moins on ombre très fortement les parties qui ne reçoivent pas une lumière propre, et qui ne peuvent être éclairées que par une lumière réfléchie très peu sensible, comme c'est le cas, par exemple, pour des creux très prononcés.

§ 192. — Une lumière intense en affaiblit une plus faible, de sorte que l'on ne peut distinguer cette dernière; et voici la raison pour laquelle on ne peut ordinairement reconnaître, que dans la partie ombrée et non sur les surfaces éclairées, la lumière réfléchie qui est moins intense que la lumière propre, à moins que cette dernière lumière ne frappe la surface sous un angle plus droit que la lumière propre, ou bien encore que le corps qui la renvoie soit très poli ou ait une couleur très claire. Il faut encore remarquer que plus la lumière est intense sur un certain point du corps, plus l'ombre correspondante sur la surface opposée à celle qui est vue par l'observateur paraît sombre; car, premièrement, elle ne se trouvera que peu éclairée par la lumière réfléchie, attendu que l'ombre se trouve placée à l'opposé des rayons lumineux; et

en second lieu, la lumière tranche aussi plus fortement en ces points avec l'ombre, ce qui fait que cette ombre semble être en ces points plus sombre que dans les endroits où la lumière n'est pas aussi intense, à cause du contraste qui en résulte.

§ 293. — Il ressort de tout ce qui vient d'être dit que l'on peut se représenter la lumière dans les parties ombrées, comme étant produite par des rayons lumineux qui auraient une direction opposée à celle des rayons lumineux directs, et nous en déduirons les règles suivantes pour la distribution de la lumière sur les parties ombrées, règles qui sont consacrées par l'expérience.

On cherchera d'abord quelle serait, d'après les données précédentes, sous le rapport de leur position, de leur forme et de leur couleur, la distribution de la lumière sur les corps s'ils se trouvaient placés dans la lumière directe, puis on fera sur eux, *s'ils sont placés dans l'ombre, une distribution de lumière inverse;* il est du reste indifférent qu'il s'agisse d'ombres ou d'ombres portées.

§ 294. Si la projection horizontale D (*fig.* 73, § 236) a une forme telle que la face située à gauche ne soit plus atteinte par les rayons lumineux, et se trouve par conséquent placée dans l'ombre, comme cela est visible dans la fig. 89, alors la projection verticale A sera teintée de telle sorte, que la partie *mnst* ne soit pas dégradée de *ns* vers *mt*, mais inversement.

§ 295. — La fig. 90 représente une réunion de plans en projection verticale et horizontale, et en même temps la direction des rayons lumineux *n*, *n*... qui les éclairent. Si l'on fait attention ici à tout ce qui a été dit jusqu'à présent relativement à la lumière directe et indirecte, on se convaincra facilement que le plan *ablm* parallèle au tableau recevra une teinte qui devra être plus foncée que celle du plan *bckl*. Ce dernier sera maintenu le plus clair de tous, et devra être dégradé de *bl* vers *ck*. Le plan *cdik* se trouvera dans l'ombre, et pour cela il sera maintenu plus foncé près de *ck* que près de *di* (§ 293). Le plan *dchi* devra être dégradé de *di* vers *hc*, et *efgh* de *gf* vers *hc*, de telle manière cependant que *efgh* soit maintenu en entier plus foncé que *dchi*, attendu que les rayons lumineux frappent le premier sous un

angle plus petit que *dehi*. La projection verticale de la fig. 90 donne en même temps une vue exacte de l'objet figuré, et fait voir combien était fondé ce que nous avons avancé dans les § 236 et 237, puisque la représentation à l'aide d'une figure linéaire de cette projection, ne suffit pas pour reconnaître l'objet représenté.

§ 296. — *Proposition*. — Soit *ab* (*fig*. 91) la projection d'une surface non transparente, *c* le lieu où est situé un corps éclairant qui renvoie dans toutes directions ses rayons lumineux, *d* le lieu où est placé l'observateur; on doit faire connaître le lieu d'où ce dernier pourra reconnaître sur la surface éclairée par *c* la lumière la plus intense.

Solution. — On abaissera de *c* sur *ab* une perpendiculaire *ch*, sur celle-ci on fera $ge = cg$ et on reliera *e* et *d* par une droite ; alors le point *f*, où elle coupera la ligne *ab*, sera le point cherché, d'où l'observateur placé en *d* apercevra la lumière la plus brillante sur cette surface.

Preuve.

On mène cf
comme $ge = cg$
$gf = gf$ et
$\angle cgf = \angle cgf = 90$ degrés
et que $\triangle egf \backsim \triangle cgf$
conséquemment $\angle afc = \angle afc$.
Mais $\angle bfd = \angle afe$;
Par suite $\angle afc = \angle bfd$,

C'est-à-dire l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion, par suite *f* est le point cherché, puisque le rayon lumineux tombe par sa réflexion dans la direction même des lignes visuelles ou *dans l'œil de l'observateur*.

Remarque. — Cette proposition n'appartient pas réellement dans son application à l'art du dessin géométrique, on ne pouvait cependant la laisser méconnue à cause de son intérêt, surtout puisqu'elle donne sujet à bien des considérations qui ap-

partiennent à cette théorie, et qu'elle peut dans la suite recevoir encore quelques applications.

§ 297. — La distribution de la lumière sur une surface courbe, convexe ou concave, se distingue essentiellement de celle qui a lieu sur une surface plane, en ce que sur cette dernière les rayons lumineux parallèles forment sur tous les points de celle-ci des angles égaux, ce qui n'a pas lieu pour des surfaces courbes, et c'est pour cette raison que la lumière n'est pas uniformément égale sur celle-ci; mais elle apparaîtra d'autant plus mate ou foncée, que l'angle d'incidence des rayons lumineux s'éloignera davantage de l'angle droit.

Si l'on examine la fig 79 et si on se représente que au-dessous du cylindre lumineux qui enveloppe la sphère, il se trouve encore une quantité innombrable de rayons lumineux parallèles qui vont frapper la demi-sphère A M B ; alors le point M sera, d'après ce qui a été dit plus haut, celui qui sera le plus éclairé ; mais à partir de là, la lumière deviendra de plus en plus faible jusqu'à ce qu'elle disparaisse complètement à la ligne de séparation d'ombre et de lumière. Là aussi la surface sphérique apparaîtra la plus foncée, car la demi-sphère A L B qui se trouve dans l'ombre deviendra de nouveau plus claire par derrière à cause de l'influence de la lumière réfléchie, quoique la demi-sphère A L B doit être en entier plus sombre que A M B.

D'après cette supposition, il importera donc essentiellement dans la distribution de la lumière sur un corps circonscrit par une surface courbe, peu importe qu'il s'agisse d'une sphère, d'un cylindre ou d'un cône, etc., de déterminer sur la partie éclairée le lieu où la lumière sera la plus intense, et où existera la limite de l'ombre et de la lumière, c'est-à-dire là où commencera l'ombre.

§ 298. — *Proposition.* — On doit faire connaître sur la surface d'un cylindre A B C D (*fig.* 92) le lieu où commence l'ombre et celui où la lumière se montre avec le plus d'intensité, lorsque les rayons lumineux arrivent parallèlement au plan de projection horizontale et obliquement par rapport au plan de projection verticale, et lorsque la flèche *l* indique, en outre, la projection des rayons lumineux sur le plan de projection horizontale.

Solution. — On décrira du point F avec DF le demi-cercle DEC que l'on regarde comme étant la base du demi-cylindre tourné vers l'observateur, on mènera la ligne *a* F parallèlement au rayon lumineux *l*, on élèvera en F la ligne F*b* perpendiculairement sur *a* F, on partagera en deux l'arc de cercle *kc* soit en *o*, on élèvera en *b* et en *o* des lignes perpendiculaires à *x y*; et *pq* marquera alors la limite de l'ombre, et *m n* par contre, la ligne de plus grand éclat.

Preuve. — Si au point *b* on mène la ligne *c d* tangente au cercle, alors *c d* sera parallèle à *a* F, et par suite *c d* sera la projection de tous les rayons lumineux, ou la trace du *plan lumineux* qui est tangent à la surface cylindrique suivant *p q*, et par suite de ce qui a été dit aux § 270 et 272, cette partie ne sera nullement éclairée. C'est pourquoi *p q* sera la limite de l'ombre *p q* C B.

Relativement à l'arête de plus grand éclat sur la surface cylindrique, il semble, au premier coup d'œil, qu'elle soit déterminée par le point *k*, parce que les rayons lumineux que l'on peut se représenter comme existant le long de l'arête *ur* sur la surface cylindrique, la frappent perpendiculairement. Mais comme les surfaces des corps présentent la lumière la plus intense dans les points où les rayons lumineux dans leur réflexions se confondent avec la direction des rayons visuels (§ 285), il arrivera que le cylindre sera à la vérité très éclairé en *k* ou *ur*, mais ce sera en *o* ou *mn* que l'intensité de la lumière sera la plus grande. En effet, si l'on mène *of* parallèlement aux rayons *l*, et *o g* parallèlement à la flèche *s*, laquelle marque la direction des rayons visuels, il s'ensuit que, puisque < *a* F *h* a été fait = à < *h* F *e*, que < *f o h* sera aussi égal à *hog*, le rayon lumineux *fo* qui atteindra donc la surface cylindrique en *o*, tombera par réflexion dans la direction *og* des lignes visuelles, et comme ceci se présentera pour tous les rayons lumineux situés au-dessous de *o*, par conséquent, le long de *mn*, il s'ensuit que la surface cylindrique devra apparaitre à l'observateur la plus éclairée en ce point.

§ 299. — Il va sans dire, que puisque la surface cylindrique doit être la plus foncée le long de *pq*, là où elle cesse d'être frappée par les rayons lumineux, elle devra de nouveau devenir plus

claire vers Bc. Car, quoique la partie $pq\,c$B, ainsi que cela résulte de la projection horizontale, ne peut plus être atteinte par les rayons lumineux directs, et se trouve placée dans l'ombre; néanmoins, la lumière réfléchie agira sur cet espace et enverra son reflet sur les corps qui enveloppent le cylindre. Quand même on admettrait le cylindre comme étant entièrement isolé, ce reflet pourra toujours être produit par la réflexion de l'air qui produit toujours, quoi qu'à un degré peu marqué, un effet semblable.

Il faut naturellement tenir compte ici de ce qui a été dit dans le § 288 sur l'action du reflet, et se rappeler que le lieu où il jettera sur une surface cylindrique la lumière, dépendra entièrement de la position et des propriétés des surfaces réfléchissantes. Pour un dessin géométrique, on ne peut admettre de semblables suppositions que pour des cas dans lesquels le reflet, ainsi que la distribution totale de la lumière, sont figurés suivant des lois simples, naturelles et faciles à appliquer. Mais pour que l'étude de la distribution de la lumière puisse, dans ce genre de dessin, se faire d'après des lois simples et d'une application facile, non pas tant au point de vue de la facilité de l'exécution, mais plutôt pour que le dessin devienne compréhensible et clair pour un observateur qui connaît ces principes, il sera nécessaire d'admettre, autant que possible, les surfaces qui reflètent, dans une position qui réponde à ce but. Mais en peinture les effets des reflets seront tout autres.

§ 300. — Toute la partie A D qp (*fig.* 92) de la surface cylindrique qui se trouve dans la lumière, ne recevra pas une teinte uniforme, mais elle sera lavée d'après les § 273 et 297, de telle sorte, que ce sera le long de mn qu'elle apparaîtra la plus éclairée et qu'elle laissera voir l'arête d'éclat. La teinte la plus foncée de cette surface éclairée commencera près de pq, c'est-à-dire à la limite de l'ombre et viendra s'étendre insensiblement vers mn. D'après le § 292, il ne devra y avoir en *aucune manière* le long de A D de reflet, parce que celui-ci ne doit être vu que dans l'ombre, c'est pourquoi le lavis de la portion A Dnm devra commencer immédiatement auprès de l'arête A D, et de là se confondre insensiblement avec la lumière brillante en mn.

Cette lumière brillante, qui est figurée le long de mn à la surface cylindrique, est surtout très visible lorsque celle-ci est bien unie, parce qu'alors elle figure une arête réellement très brillante comme, par exemple, cela a lieu sur des colonnes polies, des cylindres métalliques, etc. Si un cylindre de ce genre est vu en même temps par plusieurs personnes, chacune d'elles verra une arête brillante dans une autre place, et toujours, cependant, là où les rayons lumineux parallèles entre eux viennent, dans leur réflexion, tomber dans la direction de leurs rayons visuels. C'est d'après cette remarque que, dans un dessin perspective, on détermine le lieu de la lumière la plus intense; tandis que dans un dessin géométrique pour lequel la position de l'observateur ne change pas, il n'existe aussi qu'un seul lieu dans lequel apparaisse cette lumière de plus grande intensité, et celui-ci sera trouvé en suivant les indications du § 298.

Mais on ne commettra pas une faute si, dans la représentation d'une surface cylindrique plus terne, on établit la lumière la plus intense suivant une ligne perpendiculaire élevée en k; ce sera d'autant moins une faute, que dans ce cas cette lumière apparaitra, non pas comme une ligne droite, mais plutôt comme une raie brillante qui se confondra insensiblement dans une teinte plus foncée. Il sera toujours plus exact de placer la lumière la plus intense, non au-dessus de k, mais plus vers le milieu de la surface cylindrique, car par là, sa convexité sera mieux imitée et elle simulera mieux un cylindre naturel, et c'est aussi là le motif pour lequel on a eu égard ici plus particulièrement au lieu de la lumière la plus intense.

§ 301. — Si le cylindre avait une position horizontale, il faudrait, comme il est facile à entrevoir, suivre en tout point la marche tracée dans le § 298 pour découvrir le lieu où on devra placer la lumière la plus intense et l'ombre la plus foncée, avec cette différence seulement que xy a une position verticale et que le demi-cercle DeC se trouvera placé tout à fait comme si le rectangle ABCD avait pivoté autour de C, de telle sorte que le côté BC vienne à être couché horizontalement. Mais alors aussi les deux lignes mn et pq, fig. 92, ne se trouveront plus dans une position verticale, mais dans une position horizontale.

§ 302.—Pour trouver sur un cône droit, entier ou tronqué, dans les circonstances indiquées au § 298, la limite de l'ombre et le lieu de la lumière la plus intense, on suivra la marche indiquée, avec cette seule différence qu'on reliera par des lignes droites les points *q* et *n* après qu'on les aura trouvé ici comme dans le premier cas, avec le sommet du cône entier marqué par S. Par suite, la ligne *q*S indiquera à la surface du cône la limite de l'ombre, la ligne *n*S celle de l'arête brillante.

Dans le cas d'un cône tronqué on pourra prolonger les côtés jusqu'à ce qu'ils se coupent au sommet, puis suivre la marche que l'on vient de tracer, ou bien l'on pourra aussi, pour la petite base supérieure, se servir de la construction indiquée au § 298, et ici comme là, chercher deux points, soit, par exemple, *n'* et *q'*, que l'on reliera par des lignes droites avec *n* et *q*: et on déterminera ainsi par la ligne *qq'* la limite de l'ombre, et par *nn'* le lieu de la lumière la plus intense.

On se convaincra de l'exactitude de ce mode d'opérer si l'on se représente une multitude de sections horizontales passant par le cône, et si à chacun des cercles qui en résultent on applique la construction donnée au § 298, enfin, si on recherche pour chacun de ces cercles les points *q* et *n*, alors tous les points désignés par *q* se trouveront dans la ligne droite, cela aura encore lieu pour les points désignés par *n*.

Remarquons, enfin, que tout ce qui a été dit dans les § 299 et 300, relativement à la distribution de la lumière sur des surfaces cylindriques, trouvera aussi son application dans le cas d'un cône.

§ 303.— Si l'on exécute un dessin de telle sorte que, pour la distribution de la lumière sur ce dessin, on admette que les rayons lumineux, aient une direction telle qu'ils frappent la surface du tableau et les objets qui y sont figurés partout sous des angles droits, alors le lieu de la lumière la plus intense sur la surface courbe d'un cylindre se trouvera placé au milieu du corps, et celui de l'ombre la plus forte, ou la ligne de séparation des ombres et de la lumière sur les bords.

Ainsi, dans la fig. 93 où *abgf* est le plan vertical, et *adb* la demi-base d'un cylindre, la ligne *ce* marquera (si les rayons lumineux *m*, *m*, *m* sont perpendiculaires à la base *xy*), le lieu

où se trouve la lumière la plus intense et les arêtes *a f* et *b g* celui de l'ombre la plus forte, ou bien encore la limite de l'ombre.

Il va, du reste, sans dire, que dans la distribution de la lumière sur ce corps, il ne peut être question de reflet, puisque les rayons lumineux sont tangents, et qu'ainsi l'ombre la plus intense devra apparaître ici sans lumière de réflexion.

Il en est de même pour un cône; ici aussi la limite de l'ombre se trouvera vers les bords de ce cône s'il est éclairé perpendiculairement, et la teinte sombre qui se trouve en ce point se dégradera insensiblement vers le milieu où se trouve le jour le plus intense.

S'il s'agit d'une sphère, le point le plus lumineux se trouvera au milieu et la limite de l'ombre sera le grand cercle perpendiculaire au rayon.

Pour ces trois corps toute la face lumineuse qui est tournée vers l'observateur se trouve dans la lumière, celle qui lui est opposée est, au contraire, située dans l'ombre.

§ 304. — Si le corps figuré par A, fig. 73, § 236, avait en projection horizontale la forme de E, et si on admet que les rayons lumineux viennent le frapper obliquement, alors on le laverait, comme l'indique la fig. 94. Si l'on admet, au contraire, que les rayons lumineux viennent le frapper perpendiculairement, alors on le laverait comme l'indique la fig. 95. Ces deux figures se distinguent essentiellement l'une de l'autre en ce que dans la fig. 94 la lumière se trouve, d'après le § 298, sur le côté gauche du demi-cylindre et projette sur lui une ombre portée; dans la fig. 95, au contraire, la lumière se trouve sur le milieu du demi-cylindre qui, dans ce cas, ne peut porter aucune ombre.

§ 305. — *Problème.* — Soit ABCD, fig. 96, la projection verticale d'un *demi-cylindre creux*, et GHI sa projection horizontale, on doit désigner, à la surface concave du cylindre, le lieu de la lumière la plus intense; la direction des rayons lumineux sur le plan horizontal étant donné par la ligne *a b*.

Solution. — Attendu que le centre *c* du plan de projection horizontale se trouve situé sur la ligne EF prolongée, on divisera alors H *b* au point *d* en deux portions égales; on élèvera en *d* sur la ligne de terre *x y* une perpendiculaire qui sera tangente

à la surface concave du cylindre suivant hg, et marquera le lieu où devra se trouver la lumière la plus intense.

Preuve. — On mène ed parallèlement à ab ou à b' (qui est la direction des rayons lumineux); df parallèlement à Hc ou s (qui est la direction des rayons visuels), et on relie e et d par une droite; comme Hd a été fait égal à db, alors $< Hcd$ sera fait égal à $< dcb$, et par cela même $< edc = cdf$; d sera conséquemment le point dans lequel les rayons lumineux incidents vont par leur réflexion se confondre avec la direction des rayons visuels, et cette partie sera celle qui paraitra à l'observateur la plus éclairée.

A la première vue, on pourrait croire que c'est la ligne ik élevée perpendiculairement en b sur xy qui devrait marquer ce lieu de la lumière la plus intense, parce que le rayon lumineux passant par le point c frappe ici en b la surface du cylindre; cependant ceci n'a pas lieu pour une surface éclairée et polie. Du reste, ce qui a été dit au sujet de la distribution de la lumière des surfaces cylindriques convexes peut, sous ce rapport, trouver ici son application (1)

§ 306. — Si D*ec* (*fig.* 92) ainsi que GHI (*fig.* 96) ne sont pas des demi-cercles, mais seulement des segments de cercles, alors pour déterminer sur le plan de projection verticale le lieu de la lumière la plus intense et de l'ombre la plus foncée, on observera les indications des § 298 et 305.

Elles serviront encore pour déterminer le lieu de la lumière la plus intense sur les mêmes surfaces de la deuxième figure, avec cette différence seulement qu'il est nécessaire ici de se représenter ces arcs de cercles comme étant des demi-circonférences, ainsi que cela peut facilement s'exécuter à l'aide d'une construction géométrique très simple.

§ 307. — Si enfin le corps figuré en A (*fig.* 73, § 236) offre sur le plan de projection horizontale la forme de F, il devra dans la distribution de la lumière, qu'on exécute sur lui à l'aide du lavis, être figuré tel qu'on le voit dans la fig. 97,

(1) On indiquera au paragraphe 300 la construction de l'ombre portée qui apparaît ici, ainsi que le lieu où doit se trouver la flèche *l*.

surtout si les rayons le frappent sous un angle oblique. Mais dans le cas où les rayons lumineux ont une direction perpendiculaire les ombres portées, qui sont visibles dans la fig. 97, disparaissent complètement (1), et la lumière la plus intense sera visible, non pas sur une face, mais ainsi que la fig. 98 le montre, au milieu des surfaces concaves. (*Voyez* les § 236 et 237.)

§ 308. — Dans la fig. 95 on a représenté, en ayant égard à la fig. 73 E, l'image d'un demi-cylindre convexe avec un plan de chaque côté; l'on ne pourrait reconnaitre par cette fig. si l'on s'en rapportait à la distribution de la lumière de laquelle il est question ici, si le demi-cylindre est convexe ou concave, puisque sur ce dernier aussi la lumière la plus intense devrait se trouver sur le milieu de la surface. Mais une interprétation convenable des règles tracées dans le § 277 dissipera tout aussitôt cette incertitude; car, si le demi-cylindre est convexe, son milieu sera plus rapproché de l'observateur que les deux plans, et par ce motif il faut que ce milieu apparaisse plus éclairé que les deux plans, ainsi que cela a eu lieu dans la fig. 95. Le demi-cylindre est-il, au contraire, concave, son milieu se trouvera alors plus éloigné et on donnera aux deux plans latéraux une teinte moins foncée qu'au milieu du cylindre. Si les deux surfaces qui sont dans un même plan sont en rapport avec les surfaces courbes, et s'ils ont une position inclinée vers le tableau; alors, dans le cas de la direction perpendiculaire des rayons lumineux, la lumière la plus intense n'apparaitra en aucun cas, que ce soient des surfaces coniques ou sphériques, sur leur milieu, mais plus ou moins vers un des bords, et celui de la lumière la plus intense pourra être facilement déterminé par l'inclinaison des plans. On pourra donc, dans le cas de la position inclinée des surfaces courbes et lorsque la lumière est perpendiculaire, reconnaitre bien plus vite par l'inspection de la fig. si la surface est convexe ou concave.

§ 309. — Il faut, en général, encore faire attention, lorsqu'on opère le lavis d'un dessin, que *toutes* les faces d'un corps figuré soient teintées, et cela avec des teintes qui, selon les circonstances

(1) Voyez la note du § 304.

devront être tantôt plus claires, tantôt plus foncées ; enfin que ces surfaces ne doivent pas rester complétement blanches, mais recevoir pour le moins une teinte très légère, pour qu'on puisse toujours reconnaître qu'elles reçoivent la lumière perpendiculairement, qu'elles la réfléchissent le plus parfaitement possible, et qu'elles se trouvent situées le plus près de l'observateur. Un dessin fera par là, non-seulement un plus bel effet, mais ce qui est plus important, il aura plus de clarté, puisque par là on pourra déjà reconnaitre avec certitude que l'on a réellement devant soi une surface appartenant à ce corps, et non pas un espace vide.

Dans ce dernier cas, il faudrait conserver à cette surface la couleur du papier par conséquent n'y appliquer aucune teinte.

§ 310. — Dans les fig. 92 et 96 on a représenté et tracé immédiatement au-dessous des plans de la projection verticale les plans de projections horizontales, et cela à cause de la commodité et pour la facilité de la construction, en observant que les points correspondants du plan de projection horizontale et du plan de projection verticale viennent se placer verticalement les uns au-dessus des autres. Mais si l'espace ou les circonstances ne permettaient pas d'exécuter de cette façon le plan de projection horizontale sur le dessin, on pourra alors changer la ligne de terre, puis ensuite déterminer sur le plan de projection verticale les points nécessaires, ce qui sera, à la vérité, plus compliqué, mais pas plus difficile.

Quant à la distance qui sépare le plan de projection horizontale de la ligne de terre, lorsqu'on la trace précisément au-dessous de celui-ci, elle ne changera en rien la construction à faire, puisqu'il suffira de tracer des lignes perpendiculaires plus longues.

Ce qui vient d'être dit ici, s'applique non-seulement aux deux figures en question, mais encore à toutes celles qui se sont offertes jusqu'ici ou qui s'offriront encore par la suite.

CHAPITRE III.

De la direction des rayons lumineux et de la construction de l'ombre et de l'ombre portée.

§ 311. — Dans l'étude que nous venons de faire de la distribution de la lumière en général et de la détermination des limites de l'ombre, les rayons lumineux avaient soit une inclinaison (§ 80) simple, soit une direction perpendiculaire au tableau. Nous avons fait voir en même temps quel était l'effet qu'ils produisaient sur les surfaces qu'ils frappaient au point de vue des différentes manières de la distribution de la lumière. Il s'agit maintenant de faire voir quel effet spécial la direction des rayons lumineux produit sur le contour de l'ombre. On verra que, lorsque dans un dessin la forme et la position de l'objet à figurer sont connus et que la direction des rayons lumineux est donnée, on pourra trouver à l'aide d'une construction géométrique le contour de l'ombre portée et la limite de l'ombre, et les figurer dans un dessin telles qu'elles apparaissent dans la nature.

Mais avant d'entrer dans l'étude de ces constructions, nous allons encore fixer l'attention du lecteur sur ce qui suit.

§ 312. – Si dans la fig. 99 on admet que *xy* soit la ligne de terre, *ab* un corps opaque posé perpendiculairement sur celle-ci, et que *de* soit la direction des rayons lumineux qui éclairent ce corps et qui sont en même temps parallèles avec tous les autres rayons lumineux; il sera alors évident, que ce corps *ab* projettera sur *xy* une ombre portée *bc*, puisque *bc* ne peut plus être atteint par les rayons lumineux *s, s, s*, et parallèles à *de*. Or, comme l'ombre *bc* est égale à la hauteur *ab* du corps qui

projette l'ombre, lorsque l'inclinaison des rayons lumineux est égale (soit ici $acb = bac$) à 45 degrés; il s'ensuit que cet angle des rayons lumineux donne un moyen facile pour pouvoir apprécier la grandeur de l'ombre, lorsqu'on connait la grandeur du corps qui porte ombre, *et vice versa*, puisqu'ils doivent toujours être égaux entre eux. La connaissance de cet angle procure encore d'autres avantages pour la construction des ombres portées et conduit plus promptement au but.

§ 313. — A la vérité, on a quelquefois rapproché, et cela avec quelque raison, à l'angle de 45 degrés de produire des ombres portées trop grandes, et on a préféré donner à celle-ci la largeur de la moitié de la hauteur ou de la saillie du corps qui la produit, lorsque ce dernier, comme $a\,b$ dans la fig. 99, par exemple, forme un angle droit avec la surface sur laquelle cette ombre est projetée.

Pour faire alors une distribution exacte de la lumière, il est nécessaire de déterminer d'abord l'angle sous lequel les rayons lumineux arrivent, angle que l'on trouvera à l'aide de la formule suivante :

$$ab : bg = 2 : 1.$$

$$\text{ou cosin. } \beta : \text{sin. } \beta = 2 : 1.$$

$$\text{ainsi } \frac{\text{sin. } \beta.}{\text{cosin. } \beta.} = \tfrac{1}{2}.$$

$$\text{ce qui veut dire tang. } \beta. = \tfrac{1}{2}.$$

Conséquemment $\beta = 26$ degrés, 33 minutes, 37 secondes.

Si l'on admet ab comme étant le rayon, et bg comme étant la tangeante, on aura pour cet angle, $bg = \frac{1}{2}\,ab$; ainsi $ab = 2 \times bg$.

Remarque. — On conçoit qu'il est tout-à-fait indifférent pour cette proposition et les suivantes de tenir compte de l'angle bag ou agb, puisque l'un est chaque fois le complément de l'autre, et qu'on les connaîtra tous les deux lorsqu'un des deux aura été trouvé. Ainsi, si dans le cas présent, on devait tenir compte l'angle agb, on trouverait qu'il serait égal à 63 degrés, 26 minutes et 23 secondes.

Mais comme cet inconvénient de la largeur de l'ombre qui

résulte de l'emploi de l'angle de 45 degrés, n'est sensible que dans peu de cas, et que les avantages qu'il a sur les autres angles, méritent sous plus d'un rapport, d'être pris en grande considération, il s'ensuit qu'on lui accorde, aussi souvent que cela est possible, la préférence pour la construction des ombres portées. Cependant si, en l'employant dans un dessin, les ombres qui doivent en résulter étaient réellement par trop grandes et rendaient ainsi plusieurs parties de ce dessin incompréhensible, le dessinateur sera alors libre de choisir un autre angle pour la direction desdits rayons lumineux, ainsi que cela aura souvent lieu pour les fig. suivantes.

§ 314. — Pour de pouvoir trouver la largeur de l'ombre portée, bc (*fig.* 99), pour tout corps qu'on voudra figurer, connaissant la hauteur du corps ab qui produit cette ombre, *et vice versa*: les rayons lumineux arrivants sous un angle quelconque α, on se servira de la formule suivante :

$$1 : \text{tang.}\ \alpha = ab : bc,$$

$$\text{par conséquent } bc = ab \times \text{tang.}\ \alpha$$

$$\text{et } ab = \frac{bc}{\text{tang.}\ \alpha}$$

Si maintenant $\alpha = 0$ degré, bc sera alors $= ab \times$ tang. 0 degré $= ab.\,0 = 0$. Mais si $\alpha = 90$ degrés, alors $bc = ab \times$ tang. 90 degrés $= ab \times \infty = \infty$; c'est-à-dire, que lorsque le rayon lumineux arrivera dans la direction de ab, c'est-à-dire parallèlement, alors le corps ab ne projettera aucune ombre sur xy. Lorsque le rayon lumineux est parallèle avec xy, l'ombre sera par contre d'une longueur indéfinie.

De même, si on admet que $\alpha = 0$ degré, alors on aura $ab = \frac{bc}{tang.\ 0^{\circ}} = \frac{bc}{0} = \infty$, et si on fait $\alpha = 90$ degrés on aura $ab = \frac{bc}{tang.\ 90^{\circ}} = \frac{bc}{\infty} = 0$. Ce qui veut de nouveau dire, que quelque grand que soit ab, son ombre portée sera toujours la même, c'est-à-dire égale à 0, dans le cas où $\alpha = 0$; comme d'un autre côté, quelque petit que soit ab, son ombre portée sera d'une longueur indéfinie, si α est égal à 90 degrés.

§ 315. — Si, par exemple, *ab* (*fig.* 99) était une ligne droite matérielle, non-seulement l'ombre portée *bc* de cette ligne, mais en outre le triangle *abc*, serait dans l'ombre et ce dernier formerait dans l'espace un plan d'ombre, attendu que les rayons lumineux situés au-dessous de *dc* ne peuvent éclairer cet espace. Si un corps quelconque se trouvait placé dans cet espace, un cylindre K, par exemple, et s'il était rencontré par ce plan d'ombre, alors la ligne d'intersection du plan *abc* avec la surface cylindrique marquera l'ombre portée de la ligne *ab* sur ce corps.

§ 316. — Ce qui a été dit dans les § 312 à 315 trouve aussi son application, dans le cas où un corps non transparent *ab* (*fig.* 100), qui a une position horizontale, projette son ombre portée sur un plan *be* posé verticalement. Ici aussi la largeur de l'ombre est égale à la moitié de la hauteur, (§ 313), c'est-à-dire que $bc = ab$, lorsque l'angle *bac* donné par la direction du rayon lumineux *cd*, est égal à 45 degrés; de même que *bc* sera égal à $\frac{1}{2}ab$, lorsque $bac' = 25$ degrés, 33 minutes et 37 secondes. Si, au contraire, le rayon lumineux *d'' c''* se trouvait avoir la direction de *ab* et que l'angle $bac = 0$ degré, alors l'ombre serait aussi égale à 0, enfin celle-ci serait d'une longueur indéfinie si le rayon lumineux *d''' c'''* formait un angle droit avec *ab*, et avait, par conséquent, une direction parallèle avec *bc*.

§ 317. — Dans les § 312 à 316, on a admis, pour la détermination de l'ombre, que la direction des rayons lumineux était parallèle à la surface du plan de projection verticale, et qu'ils formaient, au contraire, avec le plan de projection horizontale un certain angle, et par conséquent, les objets dessinés sur le premier de ces plans n'ont été éclairés que du côté où arrive la lumière. Toutefois ceci n'a été fait que pour bien faire comprendre ce que nous avions précédemment dit relativement à la projection des ombres par rapport à l'angle formé par la direction des rayons lumineux. Mais dans un dessin géométrique, au contraire par lequel on se propose d'obtenir une représentation la plus exacte possible du corps, on ne peut admettre cette direction des rayons lumineux parce que par là toutes les surfaces tournées vers l'observateur et parallèles

avec la surface du plan (avec lequel dans ce cas les rayons lumineux sont aussi parallèles) seraient, d'après le § 270, entièrement dans l'ombre, ce qui nuirait beaucoup à la clarté et à l'intelligence du dessin. Il s'ensuit donc qu'il faut donner au rayon lumineux une direction telle qu'il ait une inclinaison double (§ 80) vers la surface du plan, qu'on peut se représenter dans une position verticale ; il résulte de ceci qu'il importe de chercher l'inclinaison la plus convenable et le moyen le plus avantageux pour atteindre ce but.

Si l'on se posait cette question : Combien de directions différentes peut-on donner aux rayons lumineux parallèles entre eux, par rapport à l'objet éclairé? La réponse serait *«à l'infini,»* car autant on peut se figurer de rayons partis du centre d'une sphère vers sa surface, autant on peut admettre de directions différentes pour le rayon lumineux incident avec lequel tous les autres sont donc parallèles.

Dans la perspective et dans la peinture où l'on suppose les objets éclairés par des corps lumineux situés à la surface de la terre ou dans la voûte des cieux, l'on est obligé de faire un choix parmi les uns ou les autres pour pouvoir déterminer l'angle que forment les rayons lumineux. Mais sous ce rapport, il n'y a rien de limité, et le peintre déterminera à sa volonté cet angle, suivant qu'il voudra éclairer les objets par devant ou par derrière, par en haut ou par en bas, de gauche ou de droite, et en général il choisit la direction qu'il juge la plus convenable. Mais si l'on se rappelle que dans la distribution de la lumière sur un dessin géométrique, on admet toujours la lumière comme arrivant du soleil; il s'ensuivra que le nombre des directions que l'on pourra donner aux rayons lumineux sera très limité à cause du cours même de cet astre et à cause de la position qu'il a par rapport à une certaine portion de la terre. Toutefois le nombre de ces directions sera encore très considérable. Si d'autre part, on fait attention qu'à l'heure de midi, le soleil a atteint le point le plus élevé de sa course, que les ombres portées sont alors très petites, la lumière très intense et la réflexion éblouissante ; qu'au lever et au coucher de cet astre les ombres portées sont relativement très longues, sa lumière plus terne, qu'enfin il est impossible d'admettre

que les rayons lumineux puissent éclairer un objet lorsqu'ils le frappent par derrière, c'est à-dire lorsque le soleil se trouve placé derrière l'objet qu'on veut représenter, parce qu'alors les surfaces situées en face de l'observateur, seraient situées dans l'ombre; il en résultera nécessairement, que la latitude que l'on avait primitivement pour le choix de la direction du rayon lumineux se trouve singulièrement rétréeie. Ce que l'on aura de mieux à faire ce sera de supposer la lumière du soleil comme arrivant dans une direction de haut en bas et d'avant en arrière, afin que les rayons lumineux forment sur les plans de projection horizontale et verticale un angle ni trop grand ni trop petit.

Il resterait encore à décider si les rayons lumineux, qui ont la direction que l'on vient d'indiquer, doivent se trouver dans des plans perpendiculaires à la surface du tableau, ou bien dans des plans qui se coupent suivant un angle aigu. A ce sujet, nous dirons que l'expérience montre que la clarté d'un dessin y gagnera, et qu'en même temps on obtiendra une imitation plus parfaite de la nature en admettant le second cas, attendu que dans le premier les ombres ne seront projetées que vers le bas, et que la lumière la plus intense se trouvera au milieu. Si les rayons lumineux arrivent, au contraire, de côté, la lumière la plus intense se montrera sur le côté faisant face à la lumière, et l'ombre est portée sur le côté opposé. Par là, les différentes surfaces se trouveront, en ce qui concerne leur forme et leur position, plus exactement exprimées, se distingueront plus nettement les unes des autres, et deviendront plus compréhensibles, ainsi qu'on peut s'en convaincre en examinant les fig. 84, 85, 89, 94, et 97, surtout si on les compare avec les fig. 95 et 98.

Il est complétement indifférent d'admettre la lumière comme arrivant de gauche à droite ou de droite à gauche, au point de vue de la construction à faire, de l'effet qu'on veut produire et de la clarté du dessin, puisque ni la détermination de l'ombre ni celle de l'ombre portée se trouvent changées par là; toutefois, il est d'usage, ainsi que cela a déjà été dit en parlant des traits de force d'employer la première de ces directions pour les dessins employés dans les arts, parce qu'ici cette

supposition est non-seulement la plus généralement usitée, mais que l'ouvrier a depuis longtemps été accoutumé à voir dans un dessin l'ombre placée à droite et en bas du corps; qu'il lui paraît choquant de ne pas la voir dans ce point, et qu'il peut être exposé par là à porter un jugement erroné.

Remarque. — En tout état de cause, il y aurait une exception à faire dans le cas où les objets qui sont figurés sur le tableau avaient vers lui une certaine inclinaison; mais on pourrait produire une distribution de lumière tout aussi exacte, et même plus belle en adoptant une direction autre, et de préférence celle où les rayons lumineux sont parallèles avec le tableau. Comme d'ailleurs ce cas sera fort rare, et que le plus souvent on se propose, en exécutant un dessin géométrique, de donner aux objets une position parallèle avec le tableau et non inclinée vers lui, il sera alors de règle de ne jamais choisir pour les rayons lumineux une direction parallèle au tableau, ou bien venant le frapper par derrière ou par devant, de droite ou de gauche.

§ 318. — On atteindra donc mieux le but que l'on se propose *en donnant aux rayons lumineux qui éclairent un corps une direction de devant en arrière, de gauche à droite, et en même temps de haut en bas, et qu'on peut se représenter par la diagonale d'un cube qui serait placé perpendiculairement sur le tableau.* Par là les objets dessinés sur ce tableau recevront la lumière à la fois d'en haut, de côté et devant, et les projections des rayons lumineux formeront en outre sur le plan de projection horizontale et sur le plan de projection verticale des angles de 45 degrés, avantage auquel il faut ajouter celui noté au § 312.

§ 319. — Soit dans la fig. 101 *efgh*, la surface d'un plan qui se trouve dans une position verticale, *abcdhefg* un cube placé au-devant et dans lequel la diagonale *ag* marque la direction du rayon lumineux, dont il a été question dans le paragraphe précédent, et avec lequel tous les autres rayons qui viendraient frapper la surface du plan sont parallèles. Si on se représente *hg* comme étant la ligne de terre, *efgh* comme étant la surface du plan de projection verticale, et *hgcd* comme étant celle du plan de projection horizontale, alors *eg* sera la

projection de ag sur le plan $efgh$, et dg la projection de a dans le plan $hgcd$; or, comme $efgh$ aussi bien que hgc sont des carrés, alors ces lignes eg et dg formeront partout, comme étant leur diagonale, des angles de 45 degrés. De même, dans le carré latéral $bfgc$, la ligne bg sera la projection de ag, et comme telle formera avec cg et fg aussi des angles de 45 degrés (1). Mais le plan $afgd$, dans lequel se trouve le rayon lumineux lui-même, n'est pas un carré, mais au contraire un parallélogramme, en sorte que ag ne peut plus former d'angle de 45 degrés avec les lignes qui le limitent. Or comme cette ligne ag se trouve située en dehors des trois surfaces en question, et a vers elles une certaine inclinaison, elle ne pourra donc être reproduite dans sa longueur réelle, mais seulement en *projection*. Ainsi cette figuration de la direction des rayons lumineux, à l'aide de la diagonale du cube, offrira l'avantage de donner aux *projections de ces rayons sur la surface du plan, aussi bien celle du plan de projection horizontale que celle du plan de projection verticale* des angles de 45 degrés; ce qui favorisera encore du reste la construction de l'ombre portée.

§ 320. — La connaissance de cet angle d'inclinaison des rayons lumineux (que ce soit celui indiqué dans le § 318 ou tout autre) est surtout très essentielle lorsqu'il s'agit de distribuer la lumière et les ombres sur un dessin. La lumière produite sur les corps devant être vue par l'observateur, il deviendra donc nécessaire de tenir compte du point de vue de ce dernier, ainsi qu'on l'a déjà dit lorsqu'il a été question des rayons visuels (§ 54), et en particulier, lorsque nous nous sommes occupés de l'étude de la réflexion, et il est évident que les rayons visuels partant d'un corps éclairé, rayons qui, dans un

---

(1) Si l'ou admet le côté du cube $= 1$, alors $af = \sqrt{2}$ et la diagonale ag (du rectangle $gfgd$) $= \sqrt{3}$. Comme $ag : ad = r : \sin. agd$, alors $\sin. agd = \frac{ad \,.\, r}{ag} = \frac{.r}{\sqrt{3}}$, par suite $lg \sin. agd = lgr - lg \sqrt{3} = 10 \frac{0,4771213}{2}$ $= 10 - 0,2385606 = 9,7614394$, donc l'angle $agd = 35$ degrés 16 minutes (environ), et c'est pourquoi $agf = 54$ degrés 44 minutes (environ).

dessin géométrique, sont non-seulement admis comme étant parallèles entre eux, mais qui conservent aussi cette direction dans la représentation de ce corps sur la surface d'un plan, doivent frapper partout celle-ci *perpendiculairement*, et se trouver ainsi tout-à-fait hors de la *direction oblique des rayons lumineux* décrite plus haut.

Quelque soit d'ailleurs l'angle que l'on adopte pour la direction des rayons lumineux, il est nécessaire, lorsqu'il est question de la construction des ombres portées, de déterminer avant tout la projection de ces rayons lumineux sur le plan de projection verticale et sur le plan de projection horizontale, parce que par là non-seulement on voit comment on doit procéder pour exécuter cette construction, mais on obtiendra encore la grandeur, la forme, c'est-à-dire le contour de l'ombre portée comme aussi les limites de l'ombre, le reflet et les différentes gradations de la lumière dans les parties éclairées. Il est inutile de dire que dans le choix que l'on fera de cette direction, on devra agir avec prudence et connaissance de cause, afin d'obtenir sur le dessin une distribution de lumière qui réponde au but que l'on se propose.

§ 321. — Dans les dessins destinés à servir de modèle aux ouvriers et dans lesquels, tout en faisant une certaine distribution de lumière et d'ombre afin de les rendre plus intelligibles, on supprime les ombres portées, pour empêcher toute erreur, on adopte d'ordinaire, pour la direction des rayons lumineux, un angle de 90°, de telle sorte que ces rayons lumineux viennent frapper la surface du plan et les objets qui y sont figurés sous des angles droits. Les rayons lumineux se confondent de cette manière avec les rayons visuels; et on conçoit que dans une semblable distribution de lumière, il ne pourra pas se produire d'ombre portée dans un dessin géométrique, puisque les ombres portées, produites par là, sont placées de telle manière qu'elles ne peuvent être aperçues par les rayons visuels. Un dessin de ce genre ne reçoit donc que la lumière avec ses différentes dégradations, lesquelles sont déterminées en partie par l'éloignement des objets les uns des autres, en partie par leur position et leur forme, ainsi que ceci peut trouver une application dans les dessins destinés à des

constructions d'artillerie, et l'architecture, et qui doivent servir aux ouvriers.

§ 322. — Mais comme pour la construction des ombres, on ne fera usage sur le plan de projection horizontale ou verticale que des projections de ces rayons lumineux, on commencera alors par choisir dans le dessin sur le plan de projection horizontale et verticale l'inclinaison d'un rayon lumineux; et en particulier, si on ne se trouvait pas obligé d'employer la direction marquée au § 318, ces directions des projections du rayon lumineux étant déterminées, et veut-on indiquer à leur aide le lieu où le rayon lumineux lui-même se trouve placé dans l'espace au-devant du tableau, ainsi que son inclinaison vers lui; on supposera alors sur les deux plans de projection horizontale et verticale d'autres plans perpendiculaires, qui, par leur intersection avec eux, marqueront le rayon lumineux lui-même.

Soit dans la fig. 102 *po* la ligne de terre, *mnop* la surface du plan de projection verticale, *opqr* celle du plan de projection horizontale, et par suite $nor = 90°$. Si la ligne *eg* est la projection, choisie à volonté, du rayon lumineux sur le plan de projection verticale, et *dg* celle sur le plan de projection horizontale; alors la ligne *ag*, dans laquelle les deux plans *egca* et *dgfa*, élevés perpendiculairement sur *eg* et *dg*, se coupent, sera le rayon lumineux de l'espace qui frappe le plan *mnop* dans la direction de devant en arrière, de haut en bas, de gauche à droite, et qui formera dans sa projection sur le plan vertical, l'angle *age*, et dans sa projection sur le plan horizontal l'angle *agd*. Ce qui prouve que ces deux plans se coupent réellement en *ag*, c'est que *ag* est une ligne qui se trouve aussi bien sur le plan *egca* que sur celui de *dgfa*.

Comme maintenant *eg* ainsi que *dg* ne forment pas avec *po* un angle de 45 degrés, alors les fig. *efgh* et *dhgc*, dont ces lignes sont les diagonales, ne seront plus des carrés, mais des parallélogrames, et par suite, le rayon lumineux ne sera plus la diagonale d'un cube (§ 318), mais celle d'un parallélipipède *abcdhefg* dont les dimensions sont déterminées par les angles *egh* et *dgh*, ou *heg* et *hdg* et par la grandeur des projections des rayons lumineux *dg* et *eg* prises à volonté. Ce

qui a été dit ici des lignes *eg* et *dg* peut aussi s'appliquer à la ligne *bg*, si on l'envisage comme étant la projection des rayons lumineux *ag* sur la surface latérale *bfgc*, et par suite *eg*, *dg* *bg* sont les projections du rayon lumineux *ag* sur les trois plans coordonnés.

Remarque. — Nous désignerons ultérieurement ces projections du rayon lumineux sur les différents plans de projection par les lettres *l*, *l'* *l'*; et le rayon lumineux lui-même par la lettre L. Par exemple, dans les fig. 101 et 102 les lignes *eg*, *dg* et *bg* seront marquées par les lettres *l*, *l'*, *l'*, et lorsqu'on les suppose prolongées indéfiniment, elles seront alors la projection du rayon lumineux indéfini *ag*, qu'on désignera par L.

§ 322. *a.* — Par l'opération indiquée plus haut, on parvient à la vérité à connaître le rayon lumineux et le propre lieu où il se trouve dans l'espace. Mais son *inclinaison réelle* vers les deux plans de projection, c'est-à-dire la grandeur réelle des angles *agd* et *age* (*fig.* 101 et 102) ne peut encore être connu par là.

S'il s'agissait de trouver cette inclinaison lorsque, par exemple, les projections du rayon lumineux $l = eg$ et $l' = bg$ (*fig.* 102. *a*) sont données sur les plans de projection horizontale et verticale ; voici comment on s'y prendrait : on donnera à *eg* une longueur à volonté ; de *e* on abaissera sur la ligne de terre *xy* une perpendiculaire *eh*, qui étant prolongée, viendra couper *bg* en un point *d* ; après quoi on fera $gd' = gd$, et la perpendiculaire $ad' = eh$ et l'on mènera *ag*; cette ligne sera alors l'image du rayon lumineux réel L, et *agd'* l'angle qu'il formera avec le plan de projection verticale ou avec le plan de projection horizontale.

L'exactitude de ce procédé se justifie d'abord par le § 83 ; il ne s'agissait alors, on se le rappelle, que de trouver à l'aide des projections *eg* et *dg*, la *longueur* et l'*inclinaison* réelle d'une ligne *ag* doublement inclinée ; et en second lieu, en donnant d'abord au plan de projection horizontale situé au-dessous de *xy* une position perpendiculaire au plan de projection vertical, en supposant ensuite le triangle *d'ag* placé au-dessus de *dg* ou *eg*, et *dg* seront les projections de la ligne *ag* donnée dans l'espace.

Si d'autre part on fait la perpendiculaire $df = ad'$ et qu'on mène gf, alors $\Delta dgf \cong \Delta agd'$, par suite $< dgf = < agd'$, c'est pourquoi l'inclinaison de la ligne gf vers gb indiquera également l'angle réel que forme le rayon lumineux L. Par le même procédé, on trouvera aussi la grandeur réelle de l'angle que forme le rayon lumineux avec le plan de projection verticale, lorsque les projections eg et dg du rayon lumineux seront données sur les deux plans.

§ 322. *b.* — Si la direction du rayon lumineux était celle décrite dans le § 319, on trouverait alors la grandeur réelle de l'angle d'inclinaison à l'aide du procédé bien simple qui suit. On construit un triangle rectangle dans lequel on fait l'un des côtés de l'angle droit égal au côté d'un carré, donc égal à ad (*fig.* 101) et l'autre côté égal à la diagonale de ce même carré, donc égal à dg, l'hypothénuse, c'est-à-dire ag, donnera alors la direction véritable du rayon lumineux dans l'espace, dont la projection sur les plans de projection formera un angle de 45 degrés. Mais l'angle agd est lui-même égal à peu près à 35° 16', de même aussi l'angle $dag = agf = 54° 44'$ environ (*Voyez* la note du § 319). Si l'on compare ce qui a été dit ici avec la fig. 102 *a* et si l'on admet que dans cette figure les lignes eg et dg forment avec xy un angle de 45 degrés, alors $agd' = dgf = 36° 16'$ (environ). Parce que dans ce cas ag serait la diagonale d'un rectangle dont un des côtés ad' est le côté d'un carré et dont l'autre côté $gd' = gd$ est la diagonale de ce carré.

§ 323. — S'il était donné dans l'espace un point matériel non transparent, en *a* par exemple (*fig.* 101 et 102), et si ag était le rayon lumineux L, qui vienne frapper celui-ci (les lignes eg et dg sont les projections de ce rayon lumineux qui doivent être désignées sur le plan de projection horizontale et verticale par l et l'); alors ce point projettera une ombre en g, précisément là où le rayon lumineux qui passe par *a* irait frapper le tableau, si la non transparence de ce point n'y mettait un obstacle; de sorte qu'en g il y aura une *absence partielle de lumière*, ou un point qui apparaîtra plus foncé que les autres parties du tableau qui sont frappées par les rayons lumineux parallèles avec ag. Conséquemment *l'ombre d'un point matériel sera de nouveau un point*, ajoutons seulement

encore que l'ombre d'une ligne droite, lorsqu'elle se trouve dans la direction du rayon lumineux *ag*, apparaitra de même comme un *point*.

§ 324. — D'après cela, pour trouver sur un dessin *l'ombre d'un point quelconque*, il sera nécessaire de connaître avant tout la position de ce point dans l'espace, c'est-à-dire qu'il *faudra connaître la distance verticale du point projetant l'ombre à la ligne de terre sur les plans de projection horizontale et verticale, et en second lieu les projections du rayon lumineux sur ces deux plans*. Ceci obtenu, la construction à employer sera alors bien simple et s exécutera de la manière que nous allons indiquer : soit, par exemple, dans la fig. 103 *mnop* un plan vertical et *opqu* un autre plan horizontal qu'il faut se représenter, ainsi que nous l'avons indiqué quelquefois, comme se coupant à angles droits, ainsi que on l'a figuré en la fig. 103 *a* (1), par suite, que *op* soit la ligne d'intersection de ces deux plans et *nor* un angle droit. Soit, d'autre part, *a* un point matériel non transparent situé dans l'espace, et *a'b* la distance verticale de ce point au plan *mnop*. Si maintenant la direction du rayon lumineux qui atteint le point *a* et avec lequel tous les autres rayons lumineux qui éclairent le tableau sont parallèles, est la diagonale d'un cube; en ce cas, on tracera avec *a'b* ou avec *op* sur le plan de projection horizontale sa projection *a'c* (*l'*) avec *a'b* ou *op* sous un angle de 45 degrés, on élèvera en *c*, où cette ligne coupe la ligne *op*, une perpendiculaire *cd* sur *op*, on mènera de *a* la projection *as* (*l*) du rayon lumineux sur le plan de projection verticale, faisant aussi avec *ab* ou avec *op* un angle de 45 degrés; le point d'intersection *s* de cette ligne avec la perpendiculaire *cd* sera *l'ombre cherchée* du point *a* (2).

---

(1) En comparant les fig. 103 et 103 (*a*) dans lesquels les points correspondants ont été désignés par les mêmes lettres, on comprendra plus facilement ce qui va suivre.

(2) On doit se représenter la ligne *a'b* comme si en *a* elle était perpendiculaire à *mnop* et que par suite *a'b* fut sa projection; de même il faut se représenter d'un autre côté la ligne *ab* comme si elle était en *a'* perpendiculaire à *ab*. L'angle S *ab* a, dans la fig. 103, plus de 90 degrés.

En effet, si l'on se représente un plan placé verticalement au-dessus de la projection *a'c* dans le plan horizontal, alors ce plan, dans lequel le véritable rayon lumineux (L) doit se trouver et qui, pour cette raison, sera dorénavant désigné sous le nom de *plan lumineux*, coupera ou touchera le tableau suivant la ligne droite *cd*. C'est aussi sur cette droite que devra se trouver le point dans lequel le rayon lumineux véritable L passant par *a* atteindrait la surface *mnop*, si *a* ne se trouvait pas là ou était transparent; or comme l'un et l'autre de ces cas n'existe pas, alors l'ombre du point *a* se trouvera n'importe en quel point sur *cd* et là précisément où cette ligne est coupée par la projection *l* du même rayon lumineux sur le plan vertical, c'est-à-dire en *s*, parce que *s* est en même temps le point dans lequel le rayon lumineux réel qui passe dans l'espace par le point *a* atteint le plan *mnop*, lorsqu'on se représente sur *as* et *a'c* des plans verticaux élevés sur les deux plans de projection dont l'intersection est le véritable rayon lumineux (*comparez fig.* 101 et 102).

§ 325. — Si l'on admet une direction autre pour les rayons lumineux, telle par exemple que la projection d'un de ces rayons soit représentée sur le plan de projection verticale par la ligne *ak* et sur le plan de projection horizontale par la ligne *a'c'*; dans ce cas, on trouvera l'ombre *s'* du point *a* en suivant en tout point le procédé indiqué dans le paragraphe précédent, puisqu'on élève sur *op* au point *c'*, où la projection du rayon lumineux sur le plan de projection horizontale coupe la ligne *op*, on élève sur *op* la perpendiculaire *c'd'* qui est coupée en *s'* par *ak*. Le véritable rayon lumineux se trouve de nouveau situé dans l'espace là où les deux plans élevés perpendiculairement sur *a'c'* et *as'* se coupent.

Les deux projections *ak* et *a'c'* n'ont du reste aucune relation au point de vue de leurs angles *kab* et *c'a'b* et sont complétement indépendantes les unes des autres. Ces angles ne sont ni complémentaires, ni supplémentaires, et l'inclinaison des lignes *ak* et *a'c'* vers *op* est seule laissée au choix du dessinateur.

§ 326. — Lorsque, par ce qui précède, on aura été mis à même de trouver l'ombre *d'un point*, on pourra alors aussi

trouver celle de tout autre point, même celle d'une ligne droite ou courbe. Mais comme l'ombre d'un corps sera toujours une surface dont le contour se composera d'un assemblage de lignes droites ou courbes, ou des unes et des autres, on trouvera alors l'ombre portée, *en admettant sur les lignes qui engendrent cette ombre, certains points qui serviront à la déterminer, en donnant ensuite les projections de ces points sur un autre plan de projection en cherchant, à l'aide de la direction choisie des rayons lumineux, les ombres de ces points par la construction géométrique indiquée au* § 324, et en reliant enfin ces points d'ombre par des lignes droites ou courbes. Mais la ligne qui engendre l'ombre portée est toujours en même temps la ligne de séparation d'ombre et de lumière du corps, et comme on ne peut avant tout trouver l'ombre portée que lorsqu'on a d'abord déterminé la ligne qui la produit, il s'ensuit que dans la recherche de l'ombre portée, on aura chaque fois à chercher d'abord la *ligne de séparation d'ombre et de lumière*, puisque l'ombre portée n'est que l'ombre de cette ligne.

§ 327. — Si l'on envisage d'après cela *a b* (*fig.* 103) comme étant une ligne droite non transparente et si sur elle on admet plusieurs points *e*, *f*, etc., à volonté, alors *a'* sera sur le plan horizontal la projection de tous ces points, et c'est pourquoi aussi tous les rayons lumineux que l'on a fait passer par ces points en suivant la direction décrite au § 324, se trouveront situés sur le plan lumineux élevé perpendiculairement sur *a' c*, qu'ils porteront par suite l'ombre sur la ligne *cd*, savoir *f* en *c*, *e* en *g*, etc. Car les projections des rayons lumineux passant par *e* et *f* atteignent la ligne *cd* en *c* et *g* suivant laquelle le plan lumineux est coupé par le plan de projection, et la même démonstration indiquée dans le § 324, peut s'appliquer à chaque point de la ligne *a b*. Comme *f* est placé de telle sorte que son ombre *c* tombe exactement dans *op*, alors *s c* sera l'ombre de la ligne *a f*, parce qu'alors tous les rayons lumineux qui atteignent cette ligne sont arrêtés par elle, ne peuvent atteindre le tableau, et conséquemment il se formera sur celui-ci un manque partiel de lumière, c'est-à-dire formera l'ombre portée de la ligne *af*, qui doit être une ligne droite, et le côté opposé d'un parallélogramme. La portion *fb* de la ligne *a b* ne peut plus, à la

vérité, dans cet éloignement de *muop* porter d'ombre sur ce dernier, mais elle engendrera sur le plan de projection horizontale la ligne d'ombre *a'c*, de telle manière que toute l'ombre portée de la ligne *ab* formera sur les deux plans de projection une ligne brisée *sca'*.

Remarquons encore que pour trouver la portion de la ligne *ab* qui portera ombre sur *mnop* dans les projections du rayon lumineux *ak* et *a'c'* on n'a besoin que de mener de *c'* une ligne parallèle avec *ak* jusqu'à ce qu'elle coupe en *p* la ligne *ab*. Alors *s'c'* sera l'ombre de la ligne *ap*.

§ 328. — Si, d'un autre côté, le point *a* est sur le plan de projection verticale la projection d'une ligne droite *matérielle* *a'b* (*fig.* 103), qui est posée perpendiculairement sur *mnop*, alors les rayons lumineux qui frappent *a'b* suivant la direction qu'on leur suppose, seront arrêtés par la non transparence de la ligne en question, ils ne pourront atteindre le plan *mnop*, et porteront alors une ombre *as* sur ce plan, puisque sur la ligne *as* il y aura un manque partiel de lumière. En effet, de même que *s* est l'ombre du point *a*, de même on pourra montrer que le point *h*, que l'on voulait prendre à volonté sur *a'b*, portera son ombre sur la ligne *as* et même en *i*, puisque *a* est la projection de tous les points de la ligne *a'b*.

§ 329. — Si enfin on se représente un plan non transparent élevé perpendiculairement sur le plan de projection horizontale au-dessus de *a'b* (*fig.* 103), plan qui touchera la surface *mnop* le long de *ab*; dans ce cas, ce plan, dans l'hypothèse admise ici pour la direction des rayons lumineux, portera sur *mnop* une ombre *ascb*. En effet, ainsi qu'on l'a fait voir dans les paragraphes précédents, *sc* étant l'ombre de *ab*, c'est-à-dire de la limite antérieure du plan projetant l'ombre *as* et l'ombre de la limite supérieure de ce même plan, et comme celui-ci est non transparent, il faudra qu'ici il se trouve aussi sur le tableau un manque partiel de la lumière entre *as*, *sc*, *cb* et *ab*, parce que tous les rayons lumineux qui atteignent le plan vertical élevé au-dessus de *a'b* ne pourront, à cause de la non transparence de ce dernier, atteindre la surface *mnop* au-dessous de la fig. *ascb*.

Les lignes *as* et *sc* formeront d'après cela le contour de

l'ombre portée et ce sont ces lignes que, dans ce cas, on avait essentiellement besoin de chercher pour pouvoir construire cette ombre. Mais si l'on voulait indiquer cette ombre portée sur le plan de projection horizontale, elle sera alors figurée par le triangle *a'bc*, attendu que, d'après le § 327, la ligne *a'c* formera en ce point la limite de l'ombre, et que conséquemment le triangle *a'bc* ne pourra pas être atteint par les rayons lumineux.

Comme dans cette direction des rayons lumineux *bc*, sera égal à *a' b*, il s'ensuit que la largeur de l'ombre portée sera égale à la largeur du plan qui projette l'ombre, et la distance de *b* à *c* sera alors celle qu'il faudra mesurer pour trouver par la largeur de l'ombre portée celle du corps portant l'ombre; la distance de *a* à *s* ne pourra être obtenue de cette manière, car dans ce cas, cette ligne n pourra jamais être égale à *a'b*.

Il va, du reste, sans dire, que la construction de l'ombre portée ne sera nullement changée si *ab* (*fig.* 103) était l'arête du corps Ket K'' de forme parallépipédique, auquel cas les lignes *ab* et *a'l* donneraient simultanément les limites de l'ombre (§ 326).

§ 329 (*a*). — Si l'on applique aux fig. 101 et 102 ce qui a été dit jusqu'ici, on verra bien vite dans la distribution de lumière et d'ombre qui existe ici, que si on se représente *af* comme étant une ligne matérielle portant ombre, *fg* sera l'ombre portée de cette ligne, de même que sur le plan horizontal, *dg* sera l'ombre portée de la ligne *ad* portant ombre.

§ 329 (*b*). — Comme la chose essentielle pour la construction des ombres portées, c'est de trouver l'ombre de certains *points* (§ 326), il ne sera pas surperflu de montrer aussi dans la figure 103 *a* comment on obtient, à l'aide des indications préliminaires du § 103, l'ombre *s* du point donné *a*. Soit *mnop* le plan vertical, et *opqr* le plan horizontal, et *a* un point matériel donné dans l'espace, dont les projections sur le plan vercal et horizontal sont les deux points *a'* et *a''* ; soit d'autre part *as* ou L le rayon lumineux réel, et soient *a' c* (*l'*) comme aussi *a'' s* (*l*), ses projections sur le plan vertical et le plan horizontal; alors le plan lumineux perpendiculaire sur *a' c* et passant par *as* coupera le plan vertical *mnop* le long de *c d*. C'est donc sur cette ligne *cd* que devra se trouver située l'ombre du

point *a*, et précisément là où cette ligne est coupée par la projection de ces mêmes rayons lumineux, c'est-à-dire par *a'' s'*; *s* sera par suite l'ombre de *a*, et de même *a' s* sera, d'après les paragraphes précédents, l'ombre de la ligne matérielle *a a''*, *s c a'* sera aussi l'ombre de la ligne *a a'*, et enfin *a'' b a s a''* sera l'ombre d'un plan non transparent *a a' b a''*, ombre que ce plan projette en partie sur le plan horizontal et en partie sur le plan vertical.

§ 330. — S'il se trouvait devant un plan *m n o p* (*fig.* 104) une ligne droite *ab*, non transparente, parallèle avec *m n o p*, et telle que sa distance réelle à *o p*, soit, sur le plan vertical, égale à *a g*, et sur le plan horizontal égale à *a' g*; on serait alors obligé, pour trouver l'ombre portée de cette ligne sur *m n o p*, (la direction des rayons lumineux étant prise à volonté), de rechercher l'ombre tant du point *a* que celle du point *b*, et dans ce but tracer sur le plan horizontal les projections *a' e* et *b' f* des rayons lumineux, en élevant dans les points *e* et *f* où ces projections coupent la ligne *o p* des lignes verticales *e i* et *f k* sur *o p*, et en menant de *a* et *b* sur le plan vertical les projections *a α* et *b β* des rayons lumineux. Si enfin on relie les points d'intersection α et β par une ligne droite, alors *αβ* sera l'ombre portée cherchée de *a b* sur *m n o p*.

Il ressort clairement de ce qui précède, sans qu'il soit nécessaire de rechercher une démonstration nouvelle, que α est le point d'ombre de *a*, ainsi que β celui de *b*; on restera encore convaincu que tous les points qui sont pris sur la ligne *a b* projetteront leur ombre en *a β* et non ailleurs, en songeant que *m n o p* est un plan et *a b* une ligne droite, et qu'il n'existe pas de raison pour que celle-ci produise sur le plan une ligne d'ombre courbe. Si d'ailleurs on admettait sur *a b* différents points, si on déterminait leur projection sur *a' b'* et si on recherchait les ombres de ces points, ils tomberaient tous, comme c'est facile à prouver, sur la ligne *αβ* et fourniraient ainsi une preuve géométrique de la proposition énoncée ci-dessus. On peut aussi montrer, par le même procédé, que si *a b* était parallèle avec *m n o p*, mais non avec *o p*, que si elle avait, au contraire, avec cette ligne une inclinaison quelconque, qu'alors l'ombre *αβ* devrait aussi être chaque fois

égale et parallèle avec *a b*, parce que, dans les deux cas, on pourrait toujours construire le parallélogramme *a α β b*.

Si, d'autre part, *a' b'* n'était pas parallèle à *op*, sur le plan horizontal, et par suite *a g'* pas égal à *b' h*, alors on chercherait de nouveau les ombres des points *a* et *b* comme on l'a indiqué plus haut, et on les relierait par une ligne droite qui, dans ce cas, sera ni égale ni parallèle à *ab*.

§ 331. Si *ab* (*fig.* 104) était la projection d'un plan *g a' b' h* rectangulaire, non transparent, posé perpendiculairement sur *m n o p*, alors l'ombre portée, que projette ce plan sur *m n o p*, sera égale au parallélogramme a α β, et α β sera l'ombre de *a b*, *a* α celle de *a' g* et *b* β celle de *b' h*, attendu que le point *a* est la projection de la ligne *a' g*, comme *b* est celle de la ligne *b' h*, par suite aussi *a* α, α β et β *b* devrait être le contour de l'ombre portée.

§ 332. — Si l'on devait trouver l'ombre portée, projetée par un plan rectangulaire *a b c d* (*fig.* 104) non transparent, et parallèle avec la surface *m n o p*; et si l'on suppose que la distance de leur projection *a' b* sur le plan horizontal est égal à *a' g*; alors, il faudra chercher de nouveau les ombres des points *a*, *b*, *c* et *d*, et les relier entre elles par des lignes droites. Si maintenant *a' e* est la projection du rayon lumineux sur le plan horizontal, et *a* α celle sur le plan vertical, alors α sera le point d'ombre de *a*, β celui de *b*, γ celui de *c*, δ celui de *d*; ainsi donc, α β l'ombre de *a b*, β γ celle de *b c*, γ δ celle de *c d*, et δ α celle de *d a*; conséquemment, α β γ δ sera l'ombre de *a b c d*. En effet, les rayons lumineux, arrivant parallèlement entre eux, toucheront la surface *a b c d* dans les lignes de contour *a b*, *b c*, *c d* et *d a*, et ne pourront, à cause de l'opacité de la surface, éclairer l'espace α β γ δ; c'est aussi pourquoi il se formera entre les lignes α δ, β γ, γ δ et δ α un manque partiel de lumière, c'est-à-dire une ombre portée.

Si, au contraire, la surface *a b c d* tout en restant parallèle avec *m n o p*, avait une position inclinée vers *o p*, telle que la ligne *a b* formât quelque part un angle avec celle-ci, alors *a'* ne sera pas la projection des deux points *a* et *d*, ni *b'* celle des points *b* et *c*; mais les points *a*, *b*, *c* et *d* auront leurs différentes projections sur le plan horizontal, et se trouveront toujours

encore placés sur la ligne *a' b'* ou sur son prolongement. Pour trouver dans ce cas la forme de l'ombre portée, il faudra chercher l'ombre de chaque point *a*, *b*, *c* et *d*, dont on connaît l'éloignement vertical de *op*; chercher l'ombre, puis relier les points trouvés les uns avec les autres par des lignes droites.

§ 333. — Si, enfin, *abcd* (*fig.* 104) était la surface antérieure d'un parallélipipède non transparent, posé perpendiculairement sur *mnop*, alors l'ombre portée qu'il projettera sur *mnop*, aura la forme de $a\,\alpha\beta\gamma c\,b\,a$; et l'on pourra se représenter que $\alpha\beta\gamma\delta$ est l'ombre portée de la surface *abcd*, $b\beta\gamma c$ celle de la surface latérale du parallélipipède situé sur *b'h*, $a\alpha\delta d$ celle de la surface située sur *a'g*, $ab\beta\alpha$ celle de la surface inférieure du parallélipipède, et $dc\gamma\delta$ celle de la surface supérieure, lesquelles surfaces sont toutes deux égales à *ga'b'h*. Il ne faut pas oublier que le contour de l'ombre portée, tel qu'il se forme ici, n'est produit que par les lignes *ab*, *bc*, *a'g* et *b'h*, (lesquelles lignes doivent être considérées comme si *a* et *c* étaient leur projection), et ces lignes formeront aussi, dans le cas présent, la teinte de l'ombre du corps, de telle sorte que les plans figurés par *ab* et *bc* se trouveront dans l'ombre. Mais comme les différentes ombres qu'on vient de faire connaître se recouvrent en partie ou tombent en partie derrière le corps, elles détermineront alors la forme de l'ombre portée décrite il n'y a qu'un instant, et qui apparaîtra de nouveau à la surface *mnop* comme étant un manque partiel de lumière.

Si l'on admet que la direction du rayon lumineux est égale à la diagonale d'un cube placé sur *m nop*, alors la largeur de l'ombre portée, c'est-à-dire αi et $\gamma k'$, sera égale au développement *a'g*; car les lignes αa et *a'e* formeront alors avec *ab* et *op* un angle de 45 degrés (§ 319 et 312).

§ 333 (*a*). — Si le plan *mnop* (*fig.* 104 *a*), sur lequel se trouve la parallélipipède *dh*, avait une position *po'* inclinée vers le tableau, et s'il s'agissait de trouver ensuite l'ombre portée de ce parallélipipède sur ce plan; étant données en outre les projections *aa* et *a' a'* des rayons lumineux sur le plan vertical et sur le plan horizontal; on se conformera alors exactement au procédé indiqué au paragraphe précédent pour déterminer les points d'ombre α, β, γ et δ, puis on reliera les points

a et α, ainsi que *g* et γ, par des lignes droites, de telle sorte que α soit l'ombre de *ae* ou *a'e'*, et $g\gamma$ celle de *gc* ou *b'h'*, que par suite $e\alpha\beta\gamma g$ devienne le contour de l'ombre portée, et que la face *bcgh* se trouve dans l'ombre. L'exactitude de ce procédé ressort de ce qui a été dit précédemment, et est rendue évidente par la figure elle-même.

§ 334. — Si une ligne *ab* (*fig.* 105) avait une position inclinée vers *mnop*, telle qu'elle forme avec ce plan un angle B A *o*, et si les directions des rayons lumineux (*l* et *l'*) sont données d'après le § 318, il sera alors évident que l'ombre portée de cette ligne devra commencer près de *a*, et devra également être une ligne droite. Il ne s'agira donc plus que de trouver encore un point d'ombre pour pouvoir donner la direction des lignes droites qu'on cherche. A cette fin, on choisira sur *ob* un point à volonté *c*, on le projettera sur *bb'* et aussi en *c'*, en le projettant d'abord en C puis en C', puis en faisant *b' c'* = B *c*.

Si ensuite on mène *c'f* parallèlement à *l'*, si on éléve en *f* sur *op* la perpendiculaire *fc*, et si on coupe cette perpendiculaire à partir de *c* par la ligne $c\gamma$, menée parallèlement à *l*, alors la ligne *ad*, que l'on mène par *a* et γ, sera l'ombre de *ab*, en tant qu'elle projette cette ombre sur le plan *mnop*. La ligne *b'd* sera l'autre partie de l'ombre, de sorte que toute la ligne *ab* engendrera une ligne brisée *adb'* qui sera l'ombre projetée de cette ligne sur les deux plans de projection.

Si, au lieu du plan horizontal, on fait choix d'une face latérale, on pourra trouver le point d'ombre par un moyen encore plus simple, en menant $c\gamma'$ parallèlement à *l'*, de γ une autre ligne parallèle à *op*, et en coupant celle-ci en γ à l'aide d'une ligne menée depuis *c* parallèlement à *l* (*comparez avec* § 336).

Il ressort aussi de cette figure que *ad* est l'ombre portée de A G et *b' d* celle de B G.

Si *ab* est la projection d'un plan non transparent A B *o*, alors le triangle *adb* sera son ombre sur le plan vertical, et *bdb'* celle sur le plan horizontal. La même chose a lieu pour un corps K, K', dans ce cas la ligne *ab*, qui forme le contour de l'ombre, sera en même temps la limite de l'ombre du corps.

§ 335. — *Problème.* — Trouver sur un plan *mnop* (*fig.* 106) l'ombre portée d'une croix ; étant donnée la projection de celle-ci sur le plan vertical et sur le plan horizontal, et les directions *l* et *l'* des rayons lumineux.

Solution. — D'après ce qui a été dit jusqu'à présent, on saura bien vite trouver le procédé à suivre ici. On cherchera d'abord l'ombre du plan faisant face à l'observateur et parallèle à *mnop*, dont la ligne I' D' est la projection sur le plan horizontal, d'après le § 330 : ainsi *a* sera le point d'ombre de A, *b* celui de B, *c* celui de C, etc. Ensuite on cherchera l'ombre du plan postérieur dont la ligne I' D' est la projection sur le plan horizontal ; on obtiendra ainsi les points d'ombre *a'*, *b'*, *k'*, *i'*.... et on reliera ces deux ombres par les ombres des lignes B' B', A' A', I' I', D' D', etc., qui sont les lignes *bb'*, *aa'*, *kk'*, *ii'*, *hh'*, etc.

§ 336. — La construction de cette ombre (quelque simple qu'elle soit à cause de la régularité du corps, puisque cette ombre n'est limitée que par des lignes droites et parallèles, et que l'on peut aisément trouver les points qui les déterminent sur le plan horizontal et vertical) fournit matière à des considérations fort instructives ; en effet, on voit :

1° Comment on trouve l'ombre *qa' b' br* d'un parallélipipède G' A B F posé verticalement ;

2° Que cette ombre doit être plus large que A' B' (ainsi que cela se voit promptement en comparant les lignes *qr* et *qs*), et qu'elle deviendra toujours plus large, plus l'angle sous lequel les rayons lumineux vont frapper la ligne *op* deviendra aigu, comme d'un autre côté elle deviendra égale à A' B' lorsque les rayons lumineux seront perpendiculaires à *op* ;

3° Comment on peut trouver l'ombre *i' e* d'une poutre à I E situé horizontalement dans l'espace ;

4° Comment on peut trouver l'ombre *a' b' ba* d'un plan horizontal figuré par A B, et *ih' hi* celle d'un plan vertical figuré par I H, lorsque ces plans se trouvent situé dans l'espace au-devant de *mnop*.

§ 337. — *Problème.* — Le plan *mnop* (*fig.* 107) sur lequel on doit trouver l'ombre des deux parallélipèdes A C et H F placés de manière à avoir une position *po'* inclinée vers la sur-

face du plan vertical, et les rayons lumineux sont donnés dans une direction arbitraire.

Solution. — Ainsi que cela se voit par la figure, on trouvera l'ombre tout-à-fait d'après le même procédé que celui employé pour des plans parallèles. *a b c d* sera donc l'ombre du plan A B C D, *c h k i* celle de E H G F, et *a' b' c' d'* celle du plan postérieur figuré par D' C'. De même *b b' e' c* sera l'ombre du plan représenté par B C, comme *aa' d' d* celle indiquée par A D. Enfin *e e' h' h* sera l'ombre du plan E E' H' H, et *h' f* sera la limite de l'ombre du côté gauche du corps H F placé perpendiculairement.

§ 338. — Si *m n o p* n'était point un plan, mais au contraire une surface courbe *p q o*, et si on devait trouver l'ombre portée que projette sur lui un corps A B C D (*fig.* 108), étant donné une direction arbitraire des rayons lumineux: on pourra alors employer, pour tous les cas analogues, tout ce qui a été dit jusqu'ici, dans les § 324, 326, ainsi que cela ressort nettement de la figure dans laquelle le contour de l'ombre portée a pris la forme de D *d e c b* B.

§ 339. — Il y aurait encore en général à observer ce qui suit:

1° L'ombre du plan A B C D, lorsqu'on l'envisage isolément sur la figure *a h b c e d a*. Les deux lignes *a d* et *b c* sont *droites*, parce que les projections de tous les points que l'on adopterait entre A D et B C, sont représentés sur le plan horizontal par les points A' et B', et que, par suite, les ombres de ces points devraient toutes tomber dans les lignes *a d* et *b, c*. Mais les courbes *a h b* et *c e d* sont les ombres des droites A B et C D, et l'on trouvera leur courbure avec d'autant plus d'exactitude que l'on admettra sur A B et C D un plus grand nombre de points pour leur détermination;

2°. Les parallélogrammes A *a d* D et B *b c* C sont l'ombre des plans figurés par A D, A' F et B C, B' G. Quelque surprenant qu'il puisse paraître, au premier abord, de voir l'ombre d'une droite A' F apparaître sur une surface courbe sous la forme d'une droite D *d*, autant cela deviendra évident si l'on songe que la ligne D *d* est la projection du plan lumineux qui est tangent au corps A B C D le long de l'arête A F et qu'elle engendre le contour de l'ombre. Par suite D *d* sera aussi la

projection d'un plan perpendiculaire à la surface du tableau, et comme telle elle devra apparaître sous forme de *ligne droite*. La ligne d'ombre, envisagée isolément, apparait à la surface courbe sous la forme d'une courbe, et elle formera même une portion d'ellipse, si *o q p* est la portion d'un cercle; mais sa projection dans un dessin apparaîtra dans cette position du plan lumineux, par rapport au tableau, sous la forme d'une ligne droite. La construction justifiera encore ce que l'on vient d'avancer, si l'on admet sur la ligne A' F, qui engendre l'ombre, les points I', K', et si on recherche sur le plan vertical leurs points d'ombre I, K qui, tous, se trouveront situés en D d, puisque D est la projection de tous ces points sur le plan vertical. Ce que l'on vient de dire de la ligne d'ombre D *d*, s'applique également à B *b*, C *c* et A *a*;

3°. Les figures B *b h a* A et C *c e d* D sont les ombres des plans représentés par A B et C D dont le plan A' B' G F est la projection sur le plan horizontal. Nous ajouterons seulement que les lignes *a h b* et *d e c* devront apparaître sous forme de courbes, tant à cause de la construction, que parce que les lignes génératrices A B et C D ont une position telle, que les plans lumineux qui leur sont tangents reçoivent une direction oblique vers la surface courbe *m n o p*. Si *m n o p* est la portion d'une surface cylindrique, alors les limites d'ombre réelles sont des portions d'ellipses, et les lignes *a h b* et *d e c*, comme étant leurs projections, seront de même aussi des portions d'ellipses; ou bien elles pourraient aussi apparaître sous forme d'arcs de cercle (§ 138).

§ 340. — On peut également trouver, d'après les indications des § 324 et 326, l'ombre d'une courbe A B C D E, peu importe que cette ligne soit parallèle avec le plan *m n o p* sur lequel elle porte ombre, ou ait, comme dans la fig. 109, une position inclinée vers lui; nous ferons observer, en passant, que, dans le premier cas, l'ombre sera égale à la ligne portant ombre. Il va du reste sans dire que, dans l'un et l'autre cas, l'ombre *a b c d e* pourra être indiquée d'une manière d'autant plus exacte, que l'on prendra sur la ligne génératrice A E un plus grand nombre de points pour les projetter sur A' E. Le procédé restera encore le même, soit que le plan *m*

n o p ait une position inclinée vers le tableau, soit que *m n o p*, au lieu d'être sur une surface plane, fût une surface courbe, malgré que les lignes d'ombre apparaissent alors sous une autre forme.

Enfin si A B C D E figurait un corps placé contre le plan *m n o p*, alors A *a b c d e f* F serait son ombre portée.

§ 341. — *Problème.* — Soit le *cercle* A B E D, (*fig.* 110) la courbe en question, trouver l'ombre portée qu'il projette sur le plan *m n o p*, avec lequel il est parallèle.

Solution. — On cherchera, d'après ce qui a été dit au § 524, l'ombre *c* du centre C, en admettant que la projection du point C, et la direction *l* des rayons lumineux sont donnés par *c'* et *l'* sur le plan de projection horizontale. De *c* comme centre, on décrira avec *b c* = B C un cercle semblable à *a b c d*, et l'on aura ainsi l'ombre de la circonférence ou du plan circulaire A B E D.

Si A B E D est un cercle parallèle avec le plan *m n o p*, et si les rayons lumineux sont tangents à cette circonférence, il en résultera que ces rayons formeront dans l'espace un cylindre oblique (cylindre lumineux) dont l'une des bases sera le cercle A B E D portant ombre, et dont l'autre base semblable sera l'ombre produite *a b c d*.

§ 342. — Si l'on voulait arriver au même but, en suivant le procédé indiqué au § 340, c'est-à-dire choisir sur la circonférence du cercle A B E D plusieurs points, les projetter en B' D' puis chercher leur ombre sur le plan *m n o p*. alors ils viendraient tous tomber sur la circonférence du cercle *a b c d*. Ce mode de construction ne pourra donc être suivi que dans le cas où les lignes *p o* et B' D' ont une certaine inclinaison l'une vers l'autre. Alors aussi l'ombre du cercle, au lieu d'apparaître sous la forme d'un cercle. affectera celle d'une ellipse, dont l'un des axes sera égal au diamètre *h i*, et dont l'autre sera tantôt plus grand, tantôt plus petit que *h i*, suivant le plus ou le moins d'inclinaison des lignes B' D' et *o p* et suivant l'angle d'incidence des rayons lumineux. Dans un cas pareil, on pourrait trouver, d'une manière bien facile, l'ellipse d'ombre, d'après l'indication du § 104 (3e solution).

Si *m n o p* était une surface courbe, convexe ou concave, il

faudrait alors suivre le procédé indiqué au § 340 pour pouvoir trouver la ligne d'ombre du cercle.

Disons encore que si A B E D était la projection d'un cylindre F B' D' G placé contre *m n o p*, on devra alors mener les tangentes H *h* et I *i* parallèlement avec *l* ou à C *c*, pour pouvoir déterminer le contour de l'ombre H *d e i* I. Les portions H' K et I' L de la surface cylindrique figurées par H et I, et le demi-cercle H D E I sont, dans ce cas, les lignes génératrices de l'ombre portée et en même temps les limites de l'ombre au corps.

§ 343. — D'après ce qui a été dit au § 341, il sera facile maintenant de trouver sur le plan *m n o p* l'ombre projetée par un cylindre creux A B E D (*fig.* 111), parallèle à ce plan, étant donné, les distances K C' et K γ' des centres à la ligne *o p*, ainsi que la direction *l* et *l'* des rayons lumineux. On cherchera donc, d'après le § 324, les ombres *c* et γ du centre C ou des centres C' et γ; et on décrira du point d'ombre de ce centre C, avec le rayon $c\,b = C\,B$, le cercle *a b c d* et de *c*, avec le rayon $c\,g = C\,G$, le cercle concentrique *f g h i*. Avec le même rayon, on décrira aussi du point d'ombre du centre γ, deux cercles concentriques, et on mènera les tangentes *q r* et *s t* qui représenteront l'ombre des côtés de la surface cylindrique figurés par R et T, lesquels côtés marqueront aussi sur cette surface la limite de l'ombre; et c'est de cette manière que l'on parvient à donner à l'ombre portée la forme représentée dans la fig. 111.

Si le plan *m n o p* n'était point parallèle avec les cercles, ou s'il figurait une surface courbe, on ne pourrait faire usage de la méthode abregée que nous venons d'indiquer, mais on serait obligé de chercher l'ombre de chaque point que l'on aura admis sur la circonférence de ces cercles.

§ 344. — Si le cercle A B (*fg.* 112), qui porte ombre, était parallèle avec le plan de projection horizontale, et au contraire perpendiculaire au plan de projection verticale; alors, il sera de nouveau nécessaire de choisir sur la circonférence des points isolés (d'après les § 324 et 326), de les projetter d'une projection dans l'autre, puis de rechercher successivement les points d'ombre *a*, *e*, *e'* — *c*.,., points qu'on reliera par une courbe qui, dans ce cas, sera une ellipse, suivant § 137.

Si l'on envisage A B comme étant la base supérieure d'un cylindre, on pourra alors voir à l'aide de cette figure comment on détermine l'ombre portée de ce cylindre sur le plan de projection verticale et sur le plan de projection horizontale. Dans ce cas, il est essentiel de faire attention aux points E' et F", qui sont les points de tangeance des rayons lumineux parallèles avec *l'* à la circonférence du cercle; ils sont en effet les projections à des lignes génératrices EH et FG de la limite de l'ombre portée *e i* et *f' q*, et ils déterminent en même temps sur la surface cylindrique la limite d'ombre.

Le rapport qui existe entre la longueur de l'hypoténuse ***i q*** et le côté ***i k*** explique pourquoi sur le plan de projection horizontale la largeur *i k* de l'ombre portée est égale au diamètre du cylindre, et pourquoi au contraire elle est plus grande que ce diamètre sur le plan de projection verticale.

Si A S B était une pointe de forme conique placée sur le cylindre, et s'il sagissait d'en déterminer l'ombre portée sur ***m n o p***; on chercherait alors le point d'ombre *s* du sommet S, et de ce point *s*, on mènerait deux tangentes à l'ellipse.

§ 345. Si enfin le cercle A B avait, par rapport au plan ***m n o p***, la position représentée dans la fig. 113, et si les rayons lumineux arrivaient dans la direction de *l, l', l"* (comme étant la projection de la diagonale d'un cube); on fera alors sur le plan horizontal de projection C C = AB; on projettera les points A, B, C, D et E la ligne du plan vertical sur le plan horizontal; dans ce but, on pourra faire usage du cercle A' C' B' C", et l'on cherchera ensuite, successivement les points d'ombre *a d', c, e', b, e',* C, *d"*, d'après les indications des § 324 et 326. En reliant ces points par une courbe, on aura l'ombre du cercle, qui sera une ellipse touchant la ligne A B au point C. (§ 137.)

Si pour trouver cette ellipse d'ombre, on se servait de la projection latérale A' C' B' C", et si là on menait les rayons lumineux parallèlement avec la flèche *l"*, alors on pourra trouver, comme on le voit dans cette figure, les mêmes points d'ombre, et même on pourra, pour le cas présent, accorder la préférence à ce mode de construction parce qu'il est plus aisé à comprendre.

Si l'on se représentait A B comme étant la base d'un cylindre H B, on construirait alors l'ellipse d'ombre projetté par le cercle H I, et on relierait les points g et d' ainsi que f et e' par des lignes droites. Ces droites $g d'$ et $f e'$ sont les ombres des lignes G D et F E sur la surface cylindrique où elles déterminent la limite de l'ombre.

Il est évident que les ellipses pourront être déterminées avec d'autant plus d'exactitude qu'on aura choisi un plus grand nombre de points sur A B et H I,

§ 346 – Il est aisé de comprendre, en examinant la fig. 114, comment on parvient à trouver l'ombre portée d'un *prisme* terminé par un sommet de forme pyramidale, lorsque le plan $m\ n\ o\ p$, sur lequel cette ombre est projettée, est incliné vers la surface du plan de projection vertical. Si les rayons lumineux l et l' avaient une direction autre que celle admise pour cette figure, la construction à la même, malgré que l'ombre du polygone A B reçoive une forme différente.

§ 346. a. — Pour trouver dans la fig. 113 l'ombre portée, on s'est servi de la projection des rayons lumineux sur trois plans coordonnés. Nous ne sommes entré à ce sujet dans aucune explication, parce que, dans la direction des rayons lumineux admise, leurs projections l, l' et l'', attendu qu'elles sont les diagonales de cubes, forment avec la ligne de terre horizontale et verticale des angles de 45 degrés (§ 319 fig. 101).

Si on choisissait, au contraire, pour le rayon lumineux L une toute autre direction, et si on indiquait sur deux de ces plans coordonnés la direction l et l' de ses projections, il faudrait alors que celle de sa projection l'' sur le troisième plan coordonné, si toutefois on se sert de ce plan, soit cherchée en premier lieu.

Ainsi, soit, par exemple, donné $l = a\ c$ et $l' = b\ c$ (*fig.* 114 *a*) comme étant les projections du rayon lumineux L sur le plan vertical et sur le plan horizontal et l'on désire connaître la projection l'' ou $c\ g$ du même rayon lumineux à la surface de la projection latérale ; on mènera alors $a\ b$ perpendiculairement à $x\ y$; on fera $c\ f = c\ e = d\ b$; on élèvera en f sur $x\ y$ une perpendiculaire $f\ g = a\ d$ et on mènera $c\ g$. L'exactitude de ce procédé est facilement justifiée par une comparaison de cette figure

et, comme précedemment, on cherchera les points d'ombre a' β' γ' et $'\delta$ dans la fig. I. Enfin on mènera par β et β' des droites, qui marqueront, ainsi que les deux lignes $\delta\gamma$ et $\gamma\beta$, sur le plan incliné de la fig. I, le contour de l'ombre du corps K.

Si l'on admettait que ce corps prismatique fut recouvert par un plateau P P ' de forme carrée, alors on trouvera l'ombre des huit points qu'il faudra déterminer, à l'aide de la même construction qui a été employée pour déterminer les points *a*, *b*, *c* et *d*, ainsi qu'on peut le voir par cette figure.

S'il s'agissait de tracer sur le plan incliné m' n' o' p' la projection de l'ombre portée K' et du plateau, vus en projection horizontale (*fig.* III), on devra faire attention que, suivant le (§ 346 *a*), le rayon lumineux l' forme avec $x\ y$ un angle de 45 dégrés. On devra donc mener de *a*, *b*, *c*, *d* et des angles du plateau, les projections des rayons lumineux parallèlement l'; les couper par des perpendiculaires que l'on abaissera des points correspondants de la fig. I sur $x\ y$ en α, β, γ, δ et dans les points qui déterminent l'ombre du plateau ; enfin on reliera δ et *d*, ainsi que β et *b* par des lignes droites. On restera convaincu que ces lignes sont effectivement des lignes droites et ne figurent pas des lignes brisées par leur passage du plan horizontal sur le plan incliné m' n' o' p,, si l'on fait attention qu'elles sont les projections des plans lumineux qui dans la fig. III sont tangents au corps le long des arètes *b* et *d*. Ces plans lumineux sont eux-mêmes perpendiculaires au plan horizontal, et c'est pour cette raison que chaque projection de ces plans devra apparaître aussi sous forme de ligne droite.

§ 348. *Problème.* — Trouver l'ombre portée que projette un cône *a c b* (*fig.* 116), sur un plan vertical *m n o p*, et sur un plan horizontal, ainsi que la limite de l'ombre sur sa surface courbe.

Solution. — On mènera une ligne *c d* parallèlement avec le rayon lumineux *l*, on la prolongera jusqu'à ce qu'elle coupe en *d* la ligne prolongée *p o*, et on élèvera en ce point *d* une perpendiculaire sur *p o*. Ensuite on mènera par le centre c', sur le plan horizontal, la ligne c' h' parallèlement avec l', on la prolongera jusqu'à ce qu'elle vienne couper cette perpendiculaire en h', puis on cherchera les points k et q', dans lesquels les lignes menées de h' sont tangentes à la circonférence du

cercle ; (à cet effet, on décrira par h' et e le cercle $h\,i\,k\,q'$). Si alors on mène les tangentes $h\,k$ et $h'\,q'$, celles-ci marqueront sur la surface du plan horizontal, les limites de l'ombre portée dont on ne pourra voir ici que la portion $q'g\,f\,k'$, à cause de la distance $r\,s$ qui sépare le cône du plan vertical. Au point d'intersection u, des lignes op et $c'\,h'$ on élèvera sur op une perpendiculaire, qui coupera cd en h, puis on mènera les lignes hg et hf; et le triangle $g\,h\,f$ sera alors l'ombre portée que la portion supérieure du cône projette sur le plan $m\,n\,o\,p$.

Si la distance du cône au mur était telle, que c' vienne se placer en C, alors le sommet c ou C projetterait son ombre en H, et, dans ce cas, le plan $m\ n\ o\ p$ ne recevrait aucune portion de l'ombre portée du cône.

Les rayons $c'\,k'$ et $c'\,q'$ sont les projections des côtés de la surface cylindrique désignés par les mêmes lettres, ils sont les lignes génératrices des limites d'ombre $k\,h'$ et $q'\,h'$, et forment, par suite, la limite de l'ombre sur la projection horizontale et indiquent, lorsqu'on les projette sur la projection verticale, les limites $c\,k$ et $c\,q$ de l'ombre. La portion restante de la surface cônique reste dans la lumière, et les lignes $c'\,e'$ et ce déterminent le lieu où la lumière est la plus intense, quoique d'ordinaire dans la projection horizontale d'une surface polie, celle-ci se trouve plus vers $c\,q$, et cela à cause de la réflexion.

On pourrait encore trouver sur $m\,n\,o\,p$ l'ombre portée du cône à l'aide de la construction indiquée pour la *fig.* 112, c'est-à-dire en menant à une distance quelconque du sommet c, une coupe horizontale $v\,w$, (*fig.* 116), par le cône, en projettant cette coupe sur le plan horizontal, puis en cherchant ensuite son ellipse d'ombre, et enfin en menant, à partir de h, deux tangentes à cette ellipse. On voit enfin, par ce que nous venons de dire, qu'elle serait la méthode à suivre pour pouvoir déterminer l'ombre portée d'un cône tronqué $a\,v\,w\,b$ sur une surface $m\,n\,o\,p$.

§ 349. Si le plan $m\,n\,o\,p$, sur lequel le cône projette son ombre, avait, une inclinaison $p'\,o'$, (*fig.* 117), on trouverait alors, ainsi que, du reste, cela se voit par cette figure, l'ombre portée $f\,h\,g$ sur le plan vertical, et $q'\,g'\,f'\,k'$ sur le plan

horizontal, à l'aide du procédé indiqué au paragraphe précédent.

Si un corps A B de forme parallépipidique se trouvait posé contre *m n o p*, on se représentera alors le plan antérieur qui est parallèle avec *m n o p*, et dont la ligne A' B' est la projection sur le plan horizontal, comme étant élargi par le haut et par le bas, et on cherchera, sur ce plan, par le même procédé l'ombre portée *r h' s*, mais dont on ne pourra voir que la portion *t u w v*. Sur le plan supérieur de ce corps dont A B est la projection, l'ombre s'étendra de *t v* vers *x z*, et apparaîtra, pour cette raison, limitée par les lignes *t' x'* et *v' z'* dans la projection horizontale.

L'ombre portée du corps A B lui-même sera trouvée d'après les indications données pour la *fig.* 104 *a*.

§ 350. *Problème.* — Trouver l'ombre portée qui est projettée par un prisme à quatre pans K K', sur un cylindre C, C', (*fig.* 118).

Solution. La construction qu'il est nécessaire d'employer ici se distingue de celles que l'on a indiquées jusqu'ici, en ce que les plans lumineux que l'on se représente sur le plan horizontal, placés verticalement sur les projections des rayons lumineux, forment sur le plan vertical avec la surface sur laquelle l'ombre est projettée des lignes d'intersection courbes au lieu d'être droites.

Pour trouver l'ombre du point B, on mènera sur le plan horizontal par B un rayon lumineux parallèle à *l'* et on construira sur le plan vertical l'ellipse dans laquelle le plan lumineux, placé verticalement sur le rayon lumineux en question, ira couper la surface cylindrique. Mais le rayon lumineux passant par B se trouvera lui-même dans ce plan lumineux, ainsi que nous l'avons fait voir dans le § 324, et il atteindra la surface cylindrique dans le point où l'ellipse est coupé sur le plan vertical par la projection de ce rayon lumineux. Or, comme ceci a lieu au point *b*, il s'ensuit que *b* sera l'ombre du point B. On trouvera, à l'aide du même procédé, les ombres des points A, A' et B', comme aussi celles de tous les points que l'on admettrait sur ces lignes, pour pouvoir déterminer sur la surface cylindrique, l'ombre portée et ainsi *a b b' a'* se trouvera être l'ombre du plan supérieur A B du prisme.

Il est évident que les ellipses passant par b et a' sont en même temps les ombres portées des arêtes du prisme, dont les projections sont figurées sur le plan horizontal par les points B et A', qu'elles déterminent aussi sur le plan vertical la limite de l'ombre portée du prisme, qui se confond dans la ligne ef avec celle de l'ombre de la surface cylindrique, et que la base fg du cylindre, qui fait face à l'observateur, se trouve dans l'ombre, parce qu'elle n'est point frappée par les rayons lumineux qui sont parallèles avec l'.

Si l'on projette les points a, b, b' et a' du plan vertical dans le plan horizontal, et même dans les projections correspondantes des rayons lumineux, on obtiendra alors les points α, β, β', α' comme étant les projections de ces points, ainsi que l'ombre portée entière du prisme A' α' β' β B dans cette projection. Il faut toutefois remarquer que la projection du point a ne peut, dans le cas actuel, être indiquée dans la projection horizontale, parce que ce point a est placé sur la moitié inférieure de la surface cylindrique, et c'est pour cette raison qu'elle se trouvera, dans le plan horizontal, sur la portion de la surface cylindrique située en arrière et qui n'est pas visible. On trouvera facilement, à l'aide des points g' et h' le lieu de l'ombre, ainsi que celui de l'ombre portée dans la projection horizontale, ainsi que cela ressort de l'examen de la figure.

Si on mène ym parallèlement à l, yn parallèlement à l', si l'on fait la perpendiculaire $nq = mr$ et si l'on mène yq, alors l'angle qyn indiquera, d'après le § (322. a.) l'inclinaison véritable du rayon lumineux vers la surface horizontale du tableau, parce que $\angle qyn = \angle pyo$. Si maintenant on se représente, dans la projection horizontale, la base du cylindre également retournée, de telle sorte qu'elle apparaisse sous la forme du cercle z, et si on lui mène une tangente parallèle avec yq, alors on obtiendra aussi les points G et h', et l'angle G $h'g' = \angle pyo$, et sera comme tel le véritable angle d'inclinaison du rayon lumineux.

§ 351. — Si donc il s'agissait de trouver sur une surface courbe l'ombre d'un point quelconque, lorsqu'il aura été donné sur le plan horizontal et sur le plan vertical, alors le procédé indiqué au § 324 et qu'il faudra suivre, ne subira de

modification que dans le cas où l'on aurait à rechercher ici la ligne courbe d'intersection, suivant laquelle la surface sera coupée par le plan lumineux, tandis que précédemment. on n'avait besoin de mener qu'une seule ligne droite. Pour le reste, l'ombre portée du point se trouvera ici comme là.

§ 352. — *Problème.* —Trouver l'ombre portée qui est projettée par un corps K, K' sur le plan *mnop*, fig 119, sur lequel se trouvent le demi-cylindre C, C', et la moitié du prisme à six faces P, P'.

Solution. — L'ombre portée cherchée sera engendrée par l'arête perpendiculaire à M, et figurée par *mp*, ainsi que par l'arête supérieure *p*M figurée par *m*. Si l'on mène sur le plan horizontal le rayon lumineux M *b'* parallèlement à *l'*, alors ce plan lumineux coupera le cylindre suivant la moitié d'ellipse *bab*, et le prisme suivant la ligne brisée *bccb*. Si, d'autre part, on mène sur le plan vertical la ligne *m b'* parallèlement à *l*, alors *m'* sera, d'après ce qui précède, le point d'ombre de *m* ou M, et *rm'ak* marquera sur la surface cylindrique la limite de l'ombre portée, *bcc* marquera la même ombre sur le prisme, et *mb'b'* celle sur le plan *mnop*; cette dernière ne sera toutefois visible ici qu'en *mr* et en certaines parties de la ligne *b'b'*. L'ombre portée *hgfgu* du demi-cylindre est déterminée, d'après les indications données pour la fig. 113, c'est-à-dire par le demi-cercle *hh* et par la limite de l'ombre *et* ou plutôt *ek*; de même celle du demi-prisme pourra être trouvée à l'aide de la moitié du polygone *hh* et de la limite de l'ombre *es* ou *ec*.

Il y a encore à remarquer que la limite d'ombre représentée par *rm* est naturellement une courbe et même une portion d'ellipse, mais il est nécessaire ici qu'elle apparaisse comme formant un prolongement de la ligne droite *m r*, parce que la ligne *mm'* est la projection d'un plan formé par les rayons lumineux, plan qui est tangent à l'arête supérieure (M*p*) du corps projetant ombre, § 339. Cette limite d'ombre apparaîtrait même partout sous forme de ligne droite, si les rayons lumineux arrivaient sur le plan horizontal dans la direction de M*n*, auquel cas le point *m* ou M projetterait son ombre en *x*; d'un autre côté, elle se prolongerait jusqu'au point supé-

rieur *b* comme étant une portion d'ellipse, si les projections des rayons lumineux arrivaient sur le plan vertical dans la direction de *my* ou même de *mn*.

§ 353. — La fig. 120 se distingue de la fig. 119, en ce qu'ici le plan *mnop*, ainsi que le corps K, ont une position inclinée vers le tableau. On pourra du reste se servir de la construction indiquée dans le § précédent pour la détermination de l'ombre et de l'ombre portée, et c'est aussi pourquoi on a désigné plusieurs points essentiels de cette figure par des lettres semblables.

Mais, en général, il est encore nécessaire d'observer ce qui suit :

1° Si la moitié du cylindre et le demi-prisme étaient enlevés, *m b'* B serait alors l'ombre entière du corps K sur le plan, de telle sorte que le point M projettera son ombre en *b'*, si M *b'* est mené parallèlement à *l*, que, d'un autre côté, *m b'* sera l'ombre de l'arête M*m*, et *b'* B celle de la portion M B' de l'arête M M;

2° L'ombre *r m'*, au lieu d'être ici une courbe, est une ligne droite, que l'on trouvera en adoptant sur M' *p'* plusieurs points, par exemple : *s'* et *a'*, qu'on projettera sur M *m*, en *s* et A, puis en construisant sur le plan vertical en *a' β'* et *ab'* les moitiés d'ellipses *β α β* et *b a b* (qui seront semblables à la moitié d'ellipse *bab*), enfin, en coupant ces ellipses aux points *x* et *y*, au moyen de lignes partant de *s* et A, et qu'on mène parallèlement à *l*, et en menant en dernier lieu par *z*, *y*, *x* et *m'*, une courbe;

3° On trouvera la limite de l'ombre portée *ke* sur le cylindre, en menant contre l'ellipse *bab* un tangente *tu* parallèlement à *l*, et qui touchera cette ellipse en *k*, puis en prolongeant cette ligne jusqu'à ce qu'elle coupe en *u* la ligne *b'* B et détermine ainsi le point qui, étant relié avec *g*, marquera en ce lieu la limite de l'ombre portée;

4° Pour trouver la limite de l'ombre portée projettée par le prisme sur *mnop*, on mènera au point inférieur *c*, la ligne *wv* parallèlement avec *l*, et on reliera *v* et *g* par une ligne droite;

5° Si l'on mène les lignes *bz* et *cz* parallèlement à *l*, on ob-

tiendra la portion *zz* de la ligne MM, qui formera la limite d'ombre *bc*; de même il ressort clairement, par l'examen de cette figure, que les limites des ombres engendrent chaque fois les contours des ombres portées.

§ 354. — *Problème.* — Lorsque les rayons lumineux ont une direction telle, qu'ils frappent le tableau placé verticalement, de haut en bas et d'avant en arrière, mais non de gauche à droite ni de droite à gauche, autrement dit s'ils se trouvent dans des plans qui sont perpendiculaires, aussi bien au plan horizontal qu'au plan vertical; alors leurs projections formeront aussi dans les deux plans de projection un angle droit avec la ligne de terre xy, ainsi qu'on l'a marqué dans la fig. 121, à l'aide de l et l'; par suite, les deux projections du même rayon lumineux se trouveront dans ces plans de projection, dans une même ligne droite. Ceci posé, on doit trouver l'ombre portée que projettera un prisme sur un cylindre.

Solution. — Comme, dans ce cas, les deux projections des rayons lumineux se confondront dans une même ligne droite, on ne pourra alors trouver avec facilité l'ombre, à l'aide de la projection verticale ou horizontale et par les procédés employés jusqu'ici; on y arrivera plus aisément en la cherchant par la projection antérieure et latérale, ainsi qu'on pourra aisément le comprendre à l'aide de la fig. 121. On obtiendra, d'après cela, F*fedc*C, comme étant l'ombre portée du prisme, tant sur le plan *mnop*, que sur la surface du cylindre, et si l'on ne voulait chercher que l'ombre portée de l'hexagone ABCDEF, on serait alors obligé de déterminer les courbes d'ombre *af* et *bc* à l'aide des lignes AF et BC, on trouvera de même les courbes d'ombre *af* et *cd* par EF et CD, et l'on finira ainsi par obtenir la figure *abcdcf*, qui formera sur la surface cylindrique, le contour de l'ombre portée de l'hexagone régulier ABCDEF. La limite *tt* de l'ombre se trouvera, à l'aide du point T, qui est le point de tangence au cercle du rayon lumineux, mené parallèlement avec l'. Il est évident que cette limite, ainsi que celle de l'ombre portée, variera, si on donnait aux rayons lumineux une direction autre par rapport à xy.

§ 355. — Mais pour pouvoir trouver, à l'aide de la projec-

tion horizontale, chaque point d'ombre séparément (auquel cas il est nécessaire de supposer la projection latérale comme supprimée), par exemple, l'ombre c du point C (*fig.* 121); il faudra alors faire $C\gamma = C'C'$, décrire sur qr un demi-cercle, mener le rayon lumineux $\gamma\gamma'$ parallèlement avec l', mener de γ' une ligne parallèle avec xy, et la prolonger jusqu'à ce qu'elle coupe qr en c. En effet, si on se représente le plan dans lequel se trouvent les lignes $C\gamma$, $\gamma\gamma'$, et le demi-cercle $q\gamma'r$, tourné autour de CC' jusqu'à ce qu'il soit perpendiculaire à $mnop$, alors il sera évident qu'avec la direction des rayons lumineux admise ici, le point C projettera son ombre en c sur la surface cylindrique. Mais comme il serait indispensable de répéter la même opération pour trouver chacun des points g, h, d, etc., il s'en suit que l'on devra accorder la préférence au mode de construction indiqué dans le paragraphe précédent qui est beaucoup plus simple, puisque l'on n'est obligé que de décrire un seul demi-cercle, tandis que l'autre méthode force à tracer autant de cercles qu'il y a de points à déterminer.

§ 356. — *Problème.* — Trouver l'ombre portée que le cône droit ABCDA (*fig.* 122) projette sur le plan $mnop$ incliné vers le tableau, en admettant que la projection des rayons lumineux sur le plan horizontal est perpendiculaire à po', et forme, au contraire, sur le plan vertical, un angle quelconque avec la ligne po.

Solution. — On trouvera cette ombre portée en menant par le sommet A une ligne parallèle avec le rayon lumineux l, ligne qui coupera en α la ligne bB perpendiculaire à po, et en menant de α les deux tangeantes αf et αg à l'ellipse BCDE qui est la forme sous laquelle apparait, sur le plan vertical, la base ce du cône. En effet, le plan lumineux supposé perpendiculaire à ab sera tangeant au plan $mnop$ le long de bB; c'est pourquoi il faut que le point d'ombre de A se trouve sur la ligne b'B, et là où b' B est coupé par la projection du rayon lumineux sur le plan vertical, en sorte que $f\alpha g$ sera l'ombre portée cherchée.

Si l'on se représente sur qk un plan posé parallèlement au plan $mnop$, on trouvera alors, à l'aide du même procédé,

l'ombre portée $f' \alpha' g'$, que le cône *a v w* projette sur ce plan. Mais si *kq* n'est pas la projection d'un plan, mais, au contraire, celle de L' arête K Q du prisme H S, il sera alors atteint dans les points *t* et *u*, par l'ombre $f' \alpha' g'$, et si l'on mène les lignes *y t* et *x u*, alors, on obtiendra par des motifs faciles à expliquer, l'ombre portée qui est projetée par le cône sur la face latérale H K du prisme.

Les lignes A *f* et A *g*, dans lesquelles se trouveront aussi les points *f'* et *g'*, marqueront sur la surface du cône les limites de l'ombre, et elles seront aussi les lignes génératrices des limites d'ombre αf, $\alpha' f'$, αg, $\alpha' g'$. Le rectangle QS et le triangle I K S se trouvent dans l'ombre, et ZZ est la limite de l'ombre portée du prisme déterminée par K Q.

§ 357. — *Problème.* — Construire l'ombre portée d'un corps *ag* composé de deux cylindres (*fig.* 123), en admettant que cette ombre est projetée sur trois plans parallèles entre eux, et dont les lignes *t s*, *r q* et *k i* sont les projections sur le plan horizontal, et en admettant en outre que les rayons lumineux arrivent suivant la direction de la diagonale d'un cube.

Solution. — On peut abréger le travail en cherchant d'abord l'ombre portée entière qui se forme sur le plan M N O P, dont la projection est indiquée sur le plan latéral par la ligne N O, et sur le plan horizontal par la ligne P' O'; puisque par le procédé déjà indiqué et en ayant égard à N O, on obtiendra les ombres de l'ellipse *d h* et du cercle *cac*, qu'on reliera par des tangentes correspondantes *b' g'*, *gw*... On prolongera ensuite tous les rayons lumineux menés parallèlement avec *l'*, jusqu'à ce qu'ils coupent la projection du plan situé le plus en arrière, projection qui est figurée par N O. Si on voulait encore trouver la portion de l'ombre qui sera projetée sur le plan situé en *k i*, laquelle portion sera semblable à celle déjà trouvée, si ce n'est qu'elle sera située plus bas, aux environs du *u v*; il faudra alors faire la même construction. La portion de l'ombre portée sur le plan *n' o'* antérieur, dont *t s* est la projection, ombre qui n'est engendrée que par le cylindre placé horizontalement, est la même que celle déjà trouvée sur le plan P' O'; car les projections des plans lumineux qui sont tangents à ce cylindre aux points *e* et *g*, doivent se montrer

dans les plans situés sur *ts* et *rq* sous forme de deux lignes droites, qui ne présentent aucune interruption dans leur trajet, attendu que chacune de ces lignes est la projection d'un et même plan.

Il y a encore à remarquer que l'ombre portée en question aurait pu être trouvée par la projection horizontale à l'aide du rayon lumineux *l'*, nous engageons l'élève à suivre cette manière de déterminer cette ombre, ce sera un exercice très utile.

§ 358. — *Problème.* — Trouver l'ombre portée que deux poteaux A et B (*fig.* 124) reliés par un prisme à quatre faces *abdc*, projettent sur les plans C, D, E et F, disposés sous la forme des degrés d'un escalier, lorsqu'en outre *l* et *l'* marquent la direction des rayons lumineux sur les plans de projection verticale et horizontale.

Solution. — Nous n'avons rien de particulier à ajouter à ce qui concerne l'ombre portée qui est projetée par les poteaux, ni l'ombre portée *gh* qui est projetée par un degré sur celui qui le suit, ni l'ombre *gk* qui est projetée par l'arête *ef* ou *ab* de la rampe sur chacun des degrés, attendu qu'elles sont faciles à déterminer à l'aide des deux projections I et II.

Mais pour trouver l'ombre portée du prisme *abdc*, on choisira avant tout deux coupes transversales *m*, *m'* et *n*, *n'*, et on cherchera sur le plan D leurs points d'ombre, par là on obtiendra, ainsi que cela se voit dans cette figure, les deux parallélogrammes désignés par *p* et *q*. On obtiendra ainsi facilement l'ombre portée qui se produira sur le degré D, puisque les directions des lignes qui forment la limite de cette ombre ont été données par deux points situés en face l'un de l'autre des parallélogrammes. Comme les ombres qui se produisent sur C, E et F sont parallèles avec celles que l'on vient de trouver, il s'ensuit qu'il ne sera plus nécessaire que de trouver sur chacun de ces plans les points d'ombre d'une coupe transversale, ainsi qu'on l'a ait en *a'*, *o'* et *b'*, et de mener de ces points des lignes parallèles avec celles de la limite d'ombre déjà trouvée sur le degré D.

359. — *Problème.* — Trouver l'ombre portée qui se produit sur la face postérieure d'une niche rectangulaire A' A D D'

et *a a' d' d* (*fig.* 125), si les rayons lumineux suivent la direction de *l* et *l'*.

Solution. — D'après ce qui a été dit au § 324, on cherchera α qui est l'ombre du point A, on mènera αp parallèlement avec A A', et $\alpha\delta$ parallèlement avec A D, ainsi que cela résulte de ce qui a été dit à propos des fig. 103 et 104. Si, au contraire, A D n'était pas parallèle avec *x y*, ou bien si *a' d'* n'était point parallèle avec *a d*, il sera alors nécessaire de chercher pour le moins encore, outre le point α déjà trouvé, un autre point d'ombre de A D, pour pouvoir déterminer la limite d'ombre $\alpha\delta$ dont la direction n'est plus parallèle avec A D.

S'il existait dans la partie supérieure de la niche une ouverture carrée B E F C, *b b' c' c*, on cherchera alors l'ombre des points *b*, *b' c'* et *c*, et si on relie ces points par les lignes droites, on obtiendra alors $\alpha\beta\beta'\gamma'\gamma\delta$ qui sera l'ombre de cette partie supérieure de la niche, dans le cas où on la considère comme étant une surface plane A D. Mais si on admet, qu'elle représente un corps ayant une épaisseur B E; alors l'ouverture supérieure E F projettera aussi une limite d'ombre *e e' f' f*, et par suite la limite d'ombre affectera la forme représentée dans cette figure.

On voit aisément, à l'aide de cette figure, comment on parvient à trouver l'ombre sur les degrés *m*, *n*, *o* et *m'*, *n'*, *o'*, seulement il est encore nécessaire d'observer que *a a'* α devra apparaître sous forme de ligne doite, parce qu'elle est la projection du plan lumineux tangeant à A A'.

§ 360. — Lorsque nous nous sommes occupés de la fig. 96, nous avons fait voir comment la lumière et l'ombre se distribuaient sur la surface concave comme un demi-cylindre ouvert à son extrémité supérieure; en outre dans le § 305, nous avons admis que la direction des rayons lumineux qui éclairaient ce cylindre était telle, que leur projection formait sur le plan de projection horizontale un angle aigu avec *x y*, et que sur le plan de projection verticale ces rayons étaient parallèles avec cette ligne. S'il s'agissait maintenant d'indiquer quelle est l'ombre portée qui se produit ici, on n'aura qu'à mener du point *o'* sur *x y* une perpendiculaire, et par suite la ligne entière *q r* sera la limite de l'ombre portée qui est produite

par l'arête AD sur la surface concave du cylindre ; *q* sera l'ombre de A, et *r* celle de D.

Mais si on admet que la projection des rayons lumineux est également inclinée vers *x y* sur le plan de projection verticale, et que ceux-ci arrivent par exemple dans la direction de *l*; alors le point A projettera son ombre non en *q* mais en *o*, car le plan lumineux supposé perpendiculaire sur G*o'* coupera la surface cylindrique le long de *q r*, et c'est dans cette ligne que devra se trouver le point d'ombre de A, et en particulier là où cette ligne sera coupée par la projection du même rayon lumineux sur le plan de projection verticale, c'est-à-dire en *o*. Si l'on mène après cela, au demi-cercle GHI, une tangente parallèle à *l'*, celle-ci touchera ce cercle en *m'*, et il ressort de là que la portion de la surface cylindrique dont l'arc G*m* est la projection, ne pourra être atteint par les rayons lumineux. Elle se trouvera plutôt située dans l'ombre, et sa limite supérieure A*m* engendrera entre *m* et *o* le contour de l'ombre portée. Pour trouver ensuite celle-ci, on choisira un point à volonté sur l'arc G*m'*, soit *n'*, on le projettera en *n*, et on cherchera son point d'ombre *p*. Si on trace la courbe *m p o*, alors A*m p o r*D sera l'ombre cherchée, et elle sera composée tout à la fois de l'ombre A*m*VD et de l'ombre portée *m p o r*V qui doivent toutes deux se confondre, de telle sorte cependant que l'ombre entière apparaîtra plus faible près de AD que près de *o r* à cause de l'influence du reflet.

§ 361. — *Problème.* — On suppose une niche de forme demi-circulaire, recouverte par un plan horizontal dans lequel existe une ouverture de forme demi-circulaire BC et *b e' c* (*fig.* 126); trouver l'ombre portée que ce plan projette sur la surface cylindrique concave de la niche.

Solution. — On se représentera d'abord le plan en question comme n'ayant point d'ouverture, et on choisira sur la ligne AD, qui détermine le contour de l'ombre portée, plusieurs points B, E, C...; on les projetera sur *a d* en *b*, *o* et *c*, puis on cherchera leurs points d'ombre β, *e''* et γ. Si ensuite on relie ces points avec α et D à l'aide d'une ligne courbe, on obtiendra alors la limite de l'ombre portée du plan en question, de même aussi α *k'* sera l'ombre portée de *a k*.

Si maintenant il s'agit de tenir compte de l'ouverture $b e' c$ du plan supérieur, on choisira alors de nouveau sur le demi-cercle $b e' c$ des points à volonté, tels que f', g', e', h' ...., on les projetera sur BC en F, G, E, H ...., on cherchera leurs points d'ombre f, g, e, h .... sur la surface cylindrique et on les reliera avec β et γ par une ligne courbe. On cherchera, de la même manière, la limite d'ombre $\beta' p \gamma'$ produite par le demi-cercle B' C', et de cette manière l'ombre portée entière recevra le contour représenté dans cette figure. On trouvera à l'aide des indications du paragraphe précédent la limite de l'ombre portée sur la surface cylindrique concave B' C.

§ 362. — Si les rayons lumineux ont dans les deux vues figurées une direction telle que $\angle DAa = \angle daa$, alors la courbe $a\beta\gamma D$ sera égale à l'arc $a'\beta'\gamma'd$. En effet, comme $\triangle ABa \backsimeq \triangle aba$, alors $Ba = ba'$; or, comme cela a lieu pour tous les points correspondants, il en résultera que les 2 courbes ayant des abcises et des ordonnées égales, auront une même courbure, c'est-à-dire que $a\beta\gamma D = a'\beta'\gamma', d$. Dans ce cas, la construction sera très-facile à exécuter, puisqu'il ne s'agira que de décrire avec ED un arc de cercle assez grand pour qu'il vienne couper en α' la perpendiculaire élevée en α sur xy.

La ligne limite de l'ombre portée est, en effet, telle qu'elle se représente réellement sur la surface cylindrique concave, une portion d'ellipse, puisqu'elle est produite par la section du plan lumineux tangent à AD avec la surface cylindrique; toutefois la projection de cette ellipse apparaît dans le cas dénommé comme une ligne circulaire.

§ 363. — Si la projection horizontale de la niche, au lieu de figurer un demi-cercle, était plus grand ou plus petit que celui-ci, ou si la ligne ad n'était pas parallèle avec xy, ou bien encore si l'ouverture qui existe dans la partie supérieure avait la forme d'un polygone; enfin, si la projection de la niche formait une portion d'un polygone régulier ou irrégulier; on trouvera alors pour tous ces cas les limites de l'ombre portée en suivant le procédé indiqué au § 361, seulement il sera nécessaire d'agir avec précaution et surtout de tenir compte des points qui déterminent la forme du contour de l'ombre en vue de la courbure et surtout des angles qui en résultent.

§ 364. — Il est évident qu'une direction autre des rayons lumineux modifiera la forme de l'ombre; nous ajouterons que lorsqu'ils ont, par exemple, la direction indiquée dans la fig. 121, la limite de l'ombre portée, qui n'est produite alors que par l'arête AD, apparaîtra sous forme d'une ligne courbe de A en D. Cette courbe formera dans sa projection un demi-cercle du moment que les rayons lumineux formeront avec le plan horizontal supérieur des angles de 45 degrés; mais elle se rapprochera ou s'éloignera davantage par son milieu de A D suivant que l'angle sera plus ou moins grand que 45 degrés.

Si, au contraire, les rayons lumineux arrivent suivant la direction de la diagonale d'un cube, alors l'ombre de l'arête A A' reculera jusque dans la ligne du milieu de la surface cylindrique, et l'arête horizontale AD de la partie supérieure, à laquelle le plan lumineux est tangent, engendrera une coupe oblique par la surface cylindrique, qui aura en effet la forme d'une ellipse, mais qui apparaîtra dans sa projection sous la forme d'un quart de cercle décrit avec E D.

§ 365.—*Problème.*— La surface concave d'une demi-sphère ABEB' est éclairée par les rayons lumineux qui ont la direction de l et l' (*fig.* 127); trouver le contour de l'ombre portée (1).

Solution. — Comme les rayons lumineux doivent être parallèles avec le plan de projection horizontale, il s'ensuit que l' et toutes les autres lignes qui les représentent formeront avec xy le même angle, qui indique la véritable inclinaison des rayons lumineux sur le plan de projection verticale. Soit $xz\alpha$, par exemple, un de ces angles.

Si on mène donc α, a' parallèlement avec l' et si on projette sur la ligne droite correspondante A O E en α, le point a' dans lequel le demi-cercle aoc est coupé par ce rayon lumineux, alors α sera le point d'ombre de A. On trouvera de même que γ et γ' sont les points d'ombre de C et C'. En effet, de même que

(1) Le rayon lumineux L est, dans le cas présent, parallèle avec le plan de projection horizontale, et forme avec le plan de projection verticale l'angle $xz\alpha$.

le plan lumineux, passant par AE, coupe la demi-sphère suivant le demi-cercle *aoc*, de même les plans lumineux passant par CF et C'F' couperont la demi-sphère dans les demi-cercles *cc'f* par suite *c'* sera le point, dans lequel le rayon lumineux, qui est tangent à *c* touchera la surface cylindrique, et c'est aussi pour cela que γ et γ', qui sont la projection de ce point, sera le point d'ombre de *c* et *c'*. Comme l'ombre devra commencer en B et B', puisque les rayons lumineux touchent en ces points la circonférence de la sphère comme étant des tangentes, alors B$\gamma a \gamma'$B sera le contour cherché de l'ombre portée.

Il n'est pas difficile de prouver que les points *b*, *c'* et *a'*, autrement dit les limites d'ombre, se trouvent sur ce plan dans une ligne droite. C'est aussi pourquoi la ligne courbe BαB', dont *a' b* est la projection, doit être une ellipse, et comme le grand axe BB' est donné, on pourra facilement trouver la moitié du petit axe O*a*. Enfin l'on pourra promptement tracer la limite d'ombre qu'on cherche à l'aide des indications du § 104.

§ 366. — Si les rayons lumineux forment avec la ligne de terre *x y* un angle de 45 degrés, comme c'est le cas pour la ligne *a o*, alors les points *c*, A, et *c'* et tous ceux qu'on voudra admettre, projetteront leur ombre sur la ligne BB'. De même les rayons lumineux menés de *a* et *c* couperont dans la ligne *ob* les demi-cercles qui leur appartiennent, et dans cette supposition les lignes BB' et *o b* formeront les limites d'ombre.

Si, d'autre part, la ligne *ad* donne la direction des rayons lumineux sur un des plans, et si leur direction reste la même sur l'autre plan, c'est-à-dire celle de *l*, on obtiendra alors la courbe BδB comme limite d'ombre, soit en procédant d'après les indications du § 365 ou d'après celles du § 104.

§ 367. — *Problème*. — Dans la fig 128, on a admis pour les rayons lumineux une direction telle que leur projection *l* et *l'* sur le plan vertical et sur le plan horizontal est inclinée vers la ligne de terre *x y*; trouver les ombres des différents points que l'on admet sur le bord de la *demi-sphère creuse* qui porte ombre.

Solution. — Soit A un des points choisis, dont on veut déterminer l'ombre sur la surface de la sphère creuse du plan

vertical, A' sera alors sa projection sur le plan horizontal. Si maintenant on mène A' a parallèlement avec l', et si on considère cette ligne comme étant la projection du plan lumineux passant par A A' et A', il faudra, avant toute chose, trouver la ligne d'intersection de ce plan avec la surface sphérique, parce que c'est sur cette ligne que doit se trouver le point où A portera son ombre. Pour le tracé de cette ligne d'intersection, on suivra les indications du § 145. A cet effet, on décrira avec O' A' et O' E' des demi-circonférences (la dernière devra être tangente en γ, à la ligne A' a), on les projettera sur le plan vertical en A D, A'D', E F et E'F', et on mènera une courbe passant par les points A, c, b, a', b', c' et A', dans lesquels ces lignes droites sont coupées par les perpendiculaires élevées de A', γ, β et α, et cette courbe sera alors la projection demandée de la ligne d'intersection (que l'on trouvera avec d'autant plus d'exactitude, qu'on aura décrit de O' entre G et E' un plus grand nombre de demi-circonférences concentriques). Si maintenant on mène par A un rayon lumineux parallèle avec l, alors le point a, où il coupe cette courbe, sera le point d'ombre de A. Si l'on voulait déterminer les ombres des points G, E, O et F, on serait alors obligé de mener, sur le plan horizontal, les rayons lumineux G'H, E'I, O'M et F'N, les envisager comme étant les projections de plans lumineux, puis employer le procédé qu'on vient de décrire, pour pouvoir trouver leur ligne d'intersection avec la surfaces phérique, et enfin déterminer sur chaque courbe ainsi obtenue, l'ombre du point correspondant, ainsi que cela a été démontré pour A et a. Si ensuite, on relie à l'aide d'une courbe D a A', ces points avec les points A' et D qui sont les points de tangence des rayons lumineux parallèles à l, on obtiendra alors le contour de l'ombre portée projetée dans la demi-sphère creuse.

La construction entière peut se simplifier, si l'on fait attention que ces lignes d'intersection sont des ellipses (§ 145) dont on peut facilement trouver les grands et les petits axes.

§ 368. — La raison pour laquelle la construction n'a pas présenté de difficulté dans la fig. 127, c'est que l'inclinaison des rayons lumineux vers le plan vertical était simple, que d'un autre côté, l'angle xza, était leur véritable angle d'inclinaison vers celui-ci, et qu'on avait eu qu'à projeter les points a' et c'

dans lesquels les demi-cercles étaient coupés par les rayons lumieux *a a' c c'*, directement sur les projections de ces demi-cercles, c'est à dire sur les lignes droites A E, C F et C' F', en α, γ et γ', Si, dans li fig. 128, où le rayon lumineux a une double inclinaison vers le plan, on pouvait marquer son véritable angle d'inclinaison, on pourrait alors indiquer ici, comme dans la fig., ces points d'ombre d'une manière bien plus commode. On se servira, en conséquence, du procédé indiqué pour la fig. (102 *a*), de telle sorte que dans la fig. 128, on mènera *y q* parallèlement à *l* et *y p* parallèlement à *l'* ; on abaissera la perpendiculaire *q p* sur *x y*, on élèvera en *q* sur *y q* une ligne verticale; on fera $q\,s = r\,p$ et on mènera *s y* ; cette ligne se trouvera alors être la représentation du véritable rayon lumineux L, de telle manière que si on meut le triangle *s q y* autour de *q y*, jusqu'à ce qu'il soit placé à angle droit sur *q y r*, alors *s y* sera le rayon lumineux L, et *q y* sa projection *l* sur le plan vertical, enfin *s y q* sera l'angle suivant lequel le rayon lumineux frappera réellement le plan vertical.

Donc, pour trouver à l'aide de *s y* l'ombre d'un point quelconque, du point O, par exemple, sur la surface d'une sphère, on mènera O K parallèlement à *q y* ou *l* ; on décrira au-dessus de O K une demi-circonférence ; on mènera O *v* parallèlement à *s y* ou L, et on abaissera de *v* sur O K une perpendiculaire, et alors le point *t* où elle coupera la ligne O K sera le point d'ombre de O. Si d'autre part, on méne le diamètre A D' parallèlement à *q y*, èt A *u* parallèlement à *s y*, alors la perpendiculaire *u a* donnera le point α comme étant le point d'ombre de A. On pourra trouver de la méme manière autant de points d'ombre, quel'on jugera nécessaires pour la détermination du contour.

L'exactitude de cette méthode paraîtra d'autant plus évidente, si l'on se représente les demi-cercles O *v* K et A *u* D', comme étant rabattus en arrière et assez loin pour qu'ils soient perpendiculaires au plan et qu'ils viennent rencontrer la surface courbe de la sphère ; par là le point *o* viendra se placer derrière *t* et *u* derrière α, de telle sorte que *t* et *a* donneront sur le plan vertical les projections de ces points.

§ 369. *Problème.* — Trouver l'ombre portée projetée par

une arrête de forme demi-circulaire A C B sur la surface courbe concave du *pied d'ouche* (surface engendrée par une scotie), lorsque les rayons lumineux arrivent dans une direction quelconque l et l', fig. 129.

Solution. — Sur le plan horizontal on décrira avec $od = FD$ $oa = CA$, $og = IG$, etc., des demi-cercles concentriques, puis on choisira sur A B un point à volonté β et on cherchera son point d'ombre. A cet effet, on projettera β pris sur A B en β' sur le demi-cercle correspondant $a c b$; par β' on mènera la ligne $\alpha' \delta'$ parallèlement à l' et on déterminera les points d'intersection α', β', γ' et δ' sur les lignes correspondantes du plan vertical. Si par ces points $a, \beta, \gamma, \delta, \gamma, \beta$, ainsi obtenus, on mène une courbe, celle-ci sera la projection de la ligne suivant laquelle le plan lumineux coupera audessus de $\alpha' \delta'$ la surface courbe du pied d'ouche ; et si enfin on mène βn parallèlement à l, alors n sera le point d'ombre de β. On trouvera de même m comme étant le point d'ombre de k, p comme étant celui de C, etc ; et si on relie tous ces points par la courbe G q, on obtiendra alors la limite de l'ombre portée cherchée, qui ira se perdre vers A B, dans l'ombre qui se produit sur la surface concave.

Il va sans dire que l'on trouvera avec d'autant plus d'exactitude les lignes d'intersection, que l'on aura admis entre A B et DE, un plus grand nombre de lignes parallèles, et qu'on obtiendra, par là aussi, un nombre plus grand de demi-cercles sur le plan horizontal.

§ 370. — *Problème.* — Le cercle A D E B fig. 130, représente la surface concave d'un cône droit (par exemple d'un entonnoir) et $v\ c\ w$ sa projection horizontale; trouver son ombre portée sur le plan vertical.

Solution. — On trouvera cette ombre portée, en cherchant d'après les indications du § 341, l'ombre γ du centre C; en décrivant avec $\gamma\delta = CD$ un cercle, et en lui menant les tangentes $C\delta$ et $C\beta$.

Si l'on place les points β et δ en B et D, on devra alors considérer B C et D C comme étant les lignes génératrices de l'ombre portée et en même temps comme étant les projections des limites de l'ombre sur la surface convexe du cône, c'est-à-dire que la portion représentée par B A D C B de la partie

convexe sera dans la lumière, tandis que l'autre portion plus grande se trouvera dans l'ombre. C'est aussi pourquoi la ligne d'ombre ∂ E' β produite par B E D est plus grande que le demi-cercle. Dans la projection horizontale, la limite de l'ombre que l'on aperçoit a été indiquée par *c d*.

§ 371. — Mais pour trouver l'ombre portée qui se produit sur la surface concave du cône, on remarquera que dans la distribution de la lumière qui a lieu ici, l'arc B A D auquel les rayons lumineux sont tangents, est la ligne génératrice de cette ombre portée, et qu'il ne s'agit plus que de choisir sur cet arc des points quelconques et de déterminer leur ombre sur la surface concave du cône. Ainsi donc on mènera le diamètre A E parallèlement à *l*, on projettera les points A et E en *a* et *e*, et on mènera *a c* et *c c*; le triangle *a c e* sera alors la projection de A E C, par conséquent *e c* celle de E C. Si on mène ensuite *a f* parallèlement avec *l'* et si on projette le point *f* sur E C en F, F sera alors l'ombre de A. Si on relie ce point avec B et D, à l'aide d'une courbe, on aura alors obtenu le contour de l'ombre portée, si on veut se contenter d'une détermination superficielle. Mais si au contraire on voulait déterminer plus rigoureusement ce contour on serait alors obligé de choisir encore d'autres points sur l'arc B A D; mais alors aussi la construction ne sera plus aussi simple que ce n'a été le cas pour le point A, dont l'ombre était tombée sur la ligne E C, dont la projection était la ligne droite *e c* (§ 111 et 112) Si G, était un de ces points pris à volonté, alors on mènera G H parallèlement à *l*, et on cherchera l'hyperbole correspondante *j k h* (d'après le § 140; pour son tracé on s'est servi ici des cercles C N et C M et des lignes droites correspondantes *m p* et *n k*): Enfin on mènera *g p* parallèlement à *l'* et on projettera le point *p* où elle coupe la portion *k h* de l'hyperbole, sur G H en P, et P sera aussi un point de la courbe qu'on veut déterminer.

On peut chercher, par le même procédé, autant de points d'ombre qu'on le juge nécessaire pour la détermination de cette limite d'ombre. Il est évident qu'ici l'ombre totale A D P F B A se composera d'ombres et d'ombres portées.

§ 371. (*a*) — **Avant d'aller plus loin, nous ferons encore**

remarquer que l'on peut aussi trouver la courbe d'ombre D P F B, fig. 130, en suivant le procédé indiqué au § 368, et en cherchant à l'aide de *l* et *l'* l'angle réel que forme le rayon lumineux L avec le plan vertical. De même que dans la fig. 128, on a décrit sur A D et O K des demi-cercles; de même ici on construira sur A E un triangle et sur G H une hyperbole, et on en agira de même pour tous les points que l'on adaptera sur l'arc R A D.

§ 372. — En général, on trouvera bien vite la limite de la lumière et de l'ombre sur la superficie des corps qui ne sont circonscrits que par *des plans*, lorsque la direction des rayons lumineux aura été donnée. Car comme il est impossible que sur un même plan, il y ait à la fois de la lumière et de l'ombre, il s'en suit que cette limite se trouvera toujours désignée par les arrêtes auxquelles les rayons lumineux sont tangents, et se trouvera représentée en partie par des lignes droites, en partie par des lignes brisées; ainsi qu'on a pu le remarquer du reste dans les problèmes desquels nous nous sommes occupés jusqu'ici.

La limite de l'ombre apparaitra aussi sous forme de *ligne droite* sur la surfrce courbe des corps dont les surfaces courbes sont produites par des génératrices droites, (§ 100); par exemple un cylindre, un cône, parce que les rayons lumineux sont aussi tangents à la surface suivant une ligne droite; (Par exemple F G, fig 112; *c k*, fig. 116 et 117; *c d* fig. 130.)

La limite de l'ombre sera, au contraire une ligne courbe sur des corps dont la surface courbe est produite par le mouvement d'une génératrice courbe, et qui, en général, ne sont limités que par des surfaces courbes, tels qu'une sphère, un cylindre, des vases, etc; cette limite d'ombre sera quelquefois très-difficile à trouver, et pour l'obtenir il sera nécessaire de ***déterminer sur la surface courbe les points dans lesquels les rayons lumineux sont tangents à cette surface.***

Nous allons voir, dans les paragraphes suivants, la manière de trouver ces lignes.

§ 373. — La première chose à faire, lorsqu'il s'agit de la distribution de la lumière et des ombres sur une *sphère*, c'est d'indiquer sur sa surface courbe le lieu où se trouvera ***la lumière la plus intense*** et celui où se trouvera ***la limite de l'ombre***. Or, le lieu

où cette lumière sera la plus intense sera là où les rayons lumineux frapperont perpendiculairement la surface sphérique, et la limite d'ombre se trouvera, par contre, là où les rayons lumineux seront tangents à la surface sphérique. On conclura de ceci, que pour faire une distribution convenable de la lumière et des ombres sur une sphère, on devra déterminer l'un et l'autre de ces lieux, quelle que soit d'ailleurs la direction admise pour les rayons lumineux.

§ 374. — Lorsqu'il a été question de la fig. 78, nous avons dit que, dans une sphère, cette moitié de sa surface, qui était tournée du côté d'où arrivent les rayons lumineux, se trouvait éclairée, tandis que celle qui était opposée à ces rayons se trouvait dans l'ombre. Les rayons lumineux qui sont tangents à la surface forment donc un cylindre lumineux droit dont la base est égale à l'un des grands cercles de la sphère, et qui sera perpendiculaire à l'axe du cercle auquel les rayons lumineux sont tangents (cercle qui sera parallèle avec celui de la base du cylindre).

Il est donc évident que la limite d'ombre, qui se produit à la superficie d'une sphère éclairée par des rayons lumineux parallèles entre eux, sera, en tous les cas, un des grands cercles de cette sphère, et qu'elle dépendra entièrement de la direction des rayons lumineux. Comme maintenant la projection d'un cercle sur un plan sera où une ligne droite, où une ellipse ou un cercle (§ 102, 103), il s'ensuit que la limite d'ombre de la sphère sera aussi, soit une ligne droite, soit une ellipse, soit un cercle, suivant que les rayons lumineux seront parallèles, inclinés ou perpendiculaires au plan. Il résulte donc de ce qui précède, que, dans la détermination de l'ombre sur la surface de la sphère, il ne s'agit que de trouver sur cette surface *la projection du cercle*, dans une position quelconque par rapport au plan, et à ce sujet, on trouvera dans les § 106, 107 des indications suffisantes.

De même qu'on a admis que les rayons lumineux qui sont tangents à la superficie de la sphère déterminent le commencement de l'ombre, et forment la surface d'un cylindre droit, de même on doit se représenter que le lieu où la lumière sera la plus intense sur la surface sphérique, sera donné par le point où l'axe de ce cylindre rencontrera la surface

sphérique. En effet parmi tous les rayons lumineux qui frappent la demi-sphère, et qui par conséquent remplissent aussi tout l'espace intérieur du cylindre, celui qu'on peut se représenter comme étant l'axe de ce cylindre, sera en même temps celui qui passera par le centre de la sphère, et qui frappera perpendiculairement sa superficie, car il formera un angle droit avec toutes les tangentes que l'on pourra mener à la sphère au point d'intersection. Ceci n'est plus le cas pour les autres rayons lumineux qui viennent frapper la surface sphérique autour de ce point et jusqu'à la limite d'ombre, et c'est aussi pour cela que la lumière qu'ils produisent sur cette surface, ne sera pas aussi intense que celle qui existera dans le lieu où la sphère est percée par l'axe de ce cylindre.

Il ressort enfin de ces considérations que le point qui indique sur la surface d'une sphère le lieu de la lumière la plus intense, se trouvera également distant de la circonférence du grand cercle de la sphère qui marquera la limite de l'ombre. Nous allons voir, dans ce qui va suivre, si ce point se détermine de la même manière sur une surface polie.

§ 375. — L'ombre portée que projette une sphère sur un plan, n'apparaîtra sous forme de cercle, que dans le cas où, comme dans la fig. 79, les rayons lumineux frappent perpendiculairement ce plan, et il apparaîtra sous forme d'ellipse, lorsque ceux-ci auront une toute autre direction, ellipse dont le petit axe est égal au diamètre de la sphère, et dont le grand axe dépendra de l'angle d'inclinaison des rayons lumineux. Mais dans tous les cas, le contour de cette ombre portée devra être considéré comme la ligne d'intersection du plan par ce cylindre lumineux.

§ 376.— *Problème.* — Trouver l'ombre d'une sphère, lorsque les rayons lumineux qui l'éclairent, arrivent dans la direction de la diagonale d'un cube, et que leurs projections l et l' forment par suite avec $x\,y$, tant sur le plan vertical que sur le plan horizontal, des angles de 45 degrés. (*fig.* 131, III jusqu'à VII.)

Solution. — D'après les données du § 322, on cherchera, ainsi qu'on le voit dans la fig. V, à connaître, à l'aide des projections l et l' l'angle d'inclinaison α que le rayon lumineux

L forme réellement le plan horizontal. Après quoi on tracera, comme dans la fig. I et II, le plan vertical et horizontal d'une sphère, égale à la sphère donnée, et on fera sur elle une distribution de lumière indiquée pa L et L' (de telle sorte que le rayon lumineux L forme sur le plan vertical, l'angle α avec la ligne de terre, et que sur le plan horizontal, la projection de ce rayon lumineux, c'est à-dire L', soit parallèle, au contraire, avec xy). Pour cela on mènera par le centre C (*fig.* I) la ligne Pγ parallèlement à L, et A B perpendiculairement sur P y ; P sera alors, d'après le § 374, le point de la lumière la plus intense, et le diamètre A B sera la limite de l'ombre sur la sphère parce que la surface sphérique est touchée par le cylindre lumineux le long de la circonférence du grand cercle figuré par A B. Si donc l'on projette, d'après les indications du § 1067, le cercle A B dans la fig. II, alors sa projection, ou l'ellipse A'C' B' C', sera la limite de l'ombre, et le point P' sera le lieu de la lumière la plus intense.

Pour obtenir ensuite dans la fig. IV la limite d'ombre cherchée, on donnera à la sphère fig. II une position telle au-dessous de la ligne de terre, que le plus petit axe A' B' soit parallèle à l', comme cela a eu lieu dans la fig. III, de telle manière toutefois que les deux centres O et O' se trouvent sur une même ligne perpendiculaire à xy, puis on construira dans la fig. IV, d'après le § 107 et 108, l'ellipse $dfeg$ dont de sera le grand axe, et fg le petit. Enfin, la demi-ellipse dge marquera ici la limite de l'ombre. P sera le point de la lumière la plus intense qui se trouvera là où l'ellipse $iqkr$, dont la projection est le diamètre Q' R' (*fig.* III), sera coupée par le rayon lumineux st.

§377. — L'exactitude du procédé indiqué dans le paragraphe précédent devient évidente, si l'on veut bien se rappeler que le cercle A B (*fig.* 131, I), ainsi que l'ellipse A' C' B' C' (*fig.* II et III), et l'ellipse $dfeg$ (*fig.* IV) marquent les lignes suivant lesquelles le cylindre formé par les rayons lumineux qui enveloppent la sphère, touche sa surface, ce qui résulte non seulement de la position de la sphère par rapport à la direction des rayons lumineux qui l'atteignent, mais encore de son mouvement, avec son système de rayons lumineux,

autour de IK (*fig.* I), de telle façon qu'elle atteigne la position représentée dans la fig. IV, c'est-à-dire jusqu'à ce que Q' R' (*fig.* III) soit parallèle avec *l'*, et que les projections des rayons lumineux dans la fig. IV aient atteint la direction parallèle avec *l'* qu'ils avaient primitivement. Il faut que dans le plan lumineux, élevé verticalement sur *q'* R (*fig.* III), et dont le contour apparait dans la fig. IV sous la forme d'une ellipse *iqkr*, le lieu de la lumière la plus intense soit sur la surface de la sphère là où l'ellipse est coupée par le rayon lumineux *st*, passant par le centre O, *p* sera ce point, et comme la ligne *st* a en même temps une position perpendiculaire au grand axe *de* de l'ellipse *dfeg*, il s'ensuit que ce point sera à égale distance de chaque point de cette ellipse, autrement dit du contour du grand cercle de la sphère déterminé par les rayons (§ 374).

§ 378. — Si pour trouver la limite d'ombre des sphères on voulait déterminer des points distincts, soit, par exemple, les points M et N (*fig.* 131, I), on se servira alors du procédé indiqué dans le § 131, I, à l'aide duquel on obtiendra dans la fig. II les points *u*, *u'*, *v* et *v'*. On pourrait aussi trouver ces points en menant dans la fig. I par M et N des lignes parallèles *μϑ* avec *xy*, en les considérant comme des coupes horizontales de la sphère, enfin en traçant leurs projections (qui sont des cercles) dans la fig. II, et en les coupant par des perpendiculaires menées de M et N, qui donneront ainsi les mêmes points *u*, *u'*, *v*, *v'* (1); enfin en suivant les indications du § 107 et 108, on trouvera, par ces points de la fig. I et III les points *u*, *u'*, *v* et *v'* de la fig. IV.

---

(1) Il ressort de la comparaison de ces deux méthodes de procéder, qu'en se servant du § 106, par exemple, la ligne *uu'* (*fig.* II) sera le double de M U, c'est-à-dire égale à une des cordes du cercle AQBR placée verticalement sur la ligne AB au point M, de même que, dans la fig. 30, *dd* était le double de DD'; que, d'autre part, cette même ligne *uu'* sera en même temps la corde d'un cercle *μϑ*, placée horizontalement sur M (*fig.* I). Il est donc bon de démontrer la vérité de cette assertion.

Si l'on choisit sur le diamètre AB d'un cercle ADBF (*fig.* 131, VIII) un point quelconque G, et si l'on élève GD perpendiculairement sur AB; si,

§ 379. — On pourrait également obtenir immédiatement la solution du problème du § 376, à l'aide des fig. III et IV, sans avoir recours aux projections auxiliaires I, II et V. Pour cela on mènerait dans la fig. III, outre le diamètre Q' R', encore plusieurs cordes *w w'* parallèles à *l'*, on construirait pour chacune des cordes, ainsi que cela a eu lieu pour Q' R' dans la fig. IV, l'ellipse correspondante d'après les indications du § 145, et on mènerait à chacune de ces ellipses deux tangentes parallèles à *l* (comme cela a eu lieu dans la fig. IV pour l'ellipse appartenant à Q'R' *fig.* III), et par là on obtiendra les points *a* et *b*. Si l'on réunissait par une courbe tous les points de contact ainsi obtenus, on reproduirait de nouveau l'ellipse *dfeg*.

Si l'on envisage ces cordes *ww'* comme étant les projections du plan lumineux, alors leurs intersections avec la surface de la sphère, seront des cercles qui apparaitront dans la fig. IV sous forme d'ellipses, et on obtiendra dans cette figure autant d'ellipses qu'on aura tracé de cordes dans la fig. III. Mais on peut se représenter que les rayons lumineux qui éclairent la sphère fig. IV se trouvent placés dans ces plans lumineux, c'est aussi pourquoi il faudra que les rayons lumineux

---

d'autre part, on fait passer par G une corde EF dans une direction quelconque; si on décrit sur elle un demi-cercle, et si on élève GH verticalement sur EF, alors DG sera chaque fois égal à GH.

Si l'on pose $EG = a$, $GF = b$, $AG = c$, $BG = d$, $DG = x$, et $GH = y$, alors :

$$a : c = d : b$$

par suite $ab = cd$

mais $c : x$ est aussi égal à $x : d$

et $a : y = y : b$

donc $x^2 = cd$

et $y^2 = ab$

c'est pourquoi $x^2 = y^2$

ou $x = y$

conséquemment $DG = GH$.

Il résulte de là, que la corde *uu'* (*fig.* II) peut aussi bien être égale au double de DG que de GH (*fig.* VIII).

qui sont tangents à la surface de la sphère, y soient contenus. Or, comme cette tengence doit avoir lieu pour chaque ellipse ou, en d'autres termes, doit se faire aux lignes d'intersection produites par les plans lumineux, et en particulier là où sur le plan vertical fig. IV, leur projection vient à être rencontrée par les projections des rayons lumineux; il en résultera que tous ces points de contacts reliés ensemble détermineront la ligne suivant laquelle la surface sphérique est touchée par les rayons lumineux qui éclairent cette surface. Les rayons lumineux ou le cylindre lumineux qui enveloppe la surface de la sphère et qui lui est tangent suivant cette ligne, et ils produiront en ce lieu la limite d'ombre cherchée.

Ce procédé peut être envisagé comme étant une méthode générale *pour trouver sur tout corps à surface courbe la limite de l'ombre*, lorsque les projections de ce corps sont donnés sur le plan horizontal et sur le plan vertical, ou au moins deux de ses projections. (Voyez § 390, *fig.* 133 et § 459, *fig.* 143.)

Quelque simple que paraisse être, d'après la description que nous venons d'en faire, le procédé ci-dessus, néanmoins le mode de construction indiqué au § 376 est bien plus commode lorsqu'il s'agit des sphères; car la construction d'un grand nombre d'ellipses rend le travail plus difficile et nuit à la clarté du dessin, il faut bien se persuader qu'un dessin n'y gagnera nullement en bonté par ces nombreuses lignes, surtout si la sphère devait ensuite être teintée.

On voit aussi par la fig. 131 la manière d'éclairer dans un dessin une sphère lorsque les rayons lumineux ont la direction indiquée dans la fig. I et II.

§ 380. — *Problème.* — Trouver l'ombre portée que projette la sphère fig. 131, II sur le plan horizontal, lorsque la projection des rayons lumineux est indiquée par la direction L et L'.

Solution. — Il est aisé de comprendre que le contour de l'ombre portée dans la fig. II est formé par la ligne d'intersection du cylindre lumineux A $\alpha \beta$ B (*fig.* 1) avec le plan de projection représenté par xy. Mais comme cette ligne d'intersection doit être, d'après le § 137, une ellipse dont le grand axe est indiqué par $\alpha' \beta'$, et dont le petit axe $\gamma' \gamma'$ doit toujours être

égal au diamètre C' C" de la sphère ; alors le contour à chercher pourra facilement être représenté d'après les indications du § 104, 3e solution.

Si l'on voulait trouver des points particuliers de l'ellipse $\alpha'\gamma'\beta'\gamma'$, il faudra alors se représenter le cercle A B (*fig.* I) ou l'ellipse A' C' B' C" (*fig.* II) qui est le contour de l'ombre portée comme étant la limite de l'ombre. On choisira pour cela sur A B des point à volonté, par exemple M et N, on les projettera sur l'ellipse en u, u', v et v', et on cherchera ensuite les points d'ombre m', m'', n' et n'', en même temps que l'on mènera les lignes M m et N n parallèlement à L, qu'on abaissera en m et n sur $x\,y$ des perpendiculaires, et que l'on coupera celle-i en u, u', v et v' par des parallèles avec L'.

§ 381. — Si on devait tracer dans la fig. 131, III l'ombre portée, celui-ci sera alors semblable à celle déjà trouvée pour la fig. II, toutefois le grand axe se trouvera dans la direction de la ligne Q' R' ou de l'.

Mais pour trouver l'ombre portée que la sphère (*fig.* IV) projette sur le plan vertical (sur lequel elle doit se trouver), on dessinera la sphère (*fig.* III), de telle sorte qu'elle soit rencontrée par la ligne de terre $x\,y$, et par contre on élèvera la sphère (*fig.* IV) plus au-dessus de $x\,y$, on supposera que la limite de l'ombre $d\,f\,e\,g$ est la ligne qui engendre l'ombre portée. Après quoi on projettera les points f et g (*fig.* IV) dans les points f' et g' de l'ellipse A' C' B' C" (*fig.* III), on mènera des points D, E, f' et g' des parallèles avec l', on élèvera aux points où elles couperont $x\,y$ des perpendiculaires, et on coupera celles-ci à partir de d, e, f et g avec des lignes menées parallèlement à l; en sorte que les points déterminés par d et e donneront le petit axe, et ceux déterminés par f et g le grand axe de l'ellipse qui sera la forme sous laquelle apparaîtra ici l'ombre portée.

Le grand axe se trouvera dans la direction de la ligne $s\,t$, et le petit axe sera parallèle et égal à $d\,e$. (Comparez cette ombre portée avec F C' T C" qui est celle de la fig. VI, ombre dont nous allons indiquer le mode de détermination dans le paragraphe suivant).

S'il s'agit de trouver des points particuliers de la limite de l'ombre portée, dans ce cas, on déterminera sur deux limites

elliptiques de l'ombre des points correspondants, et on cherchera leurs points d'ombre en suivant le procédé que nous venons de décrire.

§ 382. — Cependant on peut encore déterminer d'une autre manière, même plus commode, l'ombre portée de la sphère (*fig.* IV) sur le plan vertical.

Soit la sphère figurée dans la fig. 131, VI, identique avec celle représentée dans la fig. IV, et soit S T la projection d'un rayon lumineux parallèle avec l, correspondant à st (*fig.* IV). on se représentera au-dessus de S T un plan lumineux perpendiculaire et passant par le centre de la sphère, plan dans lequel doit se trouver le rayon lumineux, dont S T est la projection, et on cherchera après cela le véritable angle de ce rayon lumineux avec le plan vertical. A cet effet, on mènera dans la fig. VII, ys parallèlement avec l', et yq parallèlement avec l', on abaissera sq perpendiculairement sur xy, on élèvera en s sur sy une perpendiculaire $ss' = qs'$, et on mènera $s'y$; de cette manière sys' ou φ sera l'angle d'inclinaison cherché. Ceci paraîtra d'autant plus évident, si on se représente les triangles sys' et qys' rabattus de manière à devenir perpendiculaires sur le triangle sys', d'où il ne résulte de suite, que l et l' sont dans les deux plans les projections du rayon lumineux L'. Si après cela on mène dans la fig. VI, XY parallèlement à ST, si on prolonge de et si on décrit avec $ce = Oc$ un cercle touchant la ligne xy en e, on obtiendra alors la précédente section placée au-dessus de S T comme étant de même rabattue sur le plan vertical. Si enfin on projette les points f et g en f' et g', et si on mène par f', c et g' des parallèles à $s'y$ (parmi lesquelles celles qui passent par f' et g' seront des tangentes au cercle), jusqu'à ce qu'elles coupent X Y en F', c' et T', alors on pourra, comme cela ressort clairement de la fig. VI, facilement figurer par le procédé connu, l'ellipse Fc' Tc', qui sera l'ombre portée projetée par la sphère.

L'exactitude du procédé paraîtra d'autant plus évidente, si on se représente la section en question, de nouveau relevée sur X Y et replacée au-dessus de ST, dans sa position primitive, où S T apparaîtra comme étant la projection du rayon lumineux S'T' dont la véritable inclinaison sur le plan vertical est l'angle φ.

Pour trouver des points particuliers de l'ellipse, il ne s'agit que d'adopter sur l'ellipse *dfeg* et sur la ligne droite *f' g'* des points correspondants pris à volonté, tels, par exemple, que U', *u* et *u'*, et de déterminer leurs ombres U et U' de la même manière qu'on a déterminé les points F, *e'*, T et *e'*.

§ 383. — Le procédé indiqué dans le paragraphe précédent procure enfin encore un autre moyen très commode pour trouver les *limites de l'ombre que projette une sphère*.

Après qu'on aura trouvé dans la fig. 131, VII, l'angle réel γ du rayon lumineux L figuré ici par *l'*, on cherchera aussi l'angle δ que le rayon lumineux L forme avec le plan horizontal. Dans ce but on mènera *zq* perpendiculairement à *yq*, on fera $zq = ss'$ et on mènera *zy*; mais alors *qyr*, ou δ sera aussi l'angle que le rayon lumineux L forme avec le plan horizontal, rayon figuré ici par L''' (en admettant que le triangle *zyq* se meut autour de *qy* jusqu'à ce qu'il devienne perpendiculaire à *s'yq*. Ceci fait, on mènera au cercle Q*g'*R*e* (*fig.* VI) la tangente S' T' parallèlement à L', du point de contact *g'* on abaissera une perpendiculaire sur XY, qu'on prolongera jusqu'à ce qu'elle coupe en *g* la ligne ST, puis on tracera par *d*, *g* et *e* une ellipse, et on aura ainsi trouvé la limite de l'ombre demandée. Il est évident que le point *g* pourra être obtenu d'une manière encore plus facile si on mène de suite à la sphère la tangente S' T' parallèlement à L', et si on projette en *g* le point de contact, ainsi qu'on vient de le faire voir.

On trouvera de la même manière, dans la fig. IV, le point *g*. Mais pour obtenir de suite dans la fig. III le point B', il n'est nécessaire que de mener à la sphère une tangente qui soit parallèle à L'', et d'abaisser du point de contact une perpendiculaire sur Q'R', qui coupera cette ligne en B'. Après quoi on tracera par C B C', la demi-ellipse qui sera la limite de l'ombre.

§ 383 (*a*). — On a considéré dans la fig. 131, la fig. I comme étant la projection verticale, et la fig. II comme étant la projection horizontale. Mais on pourrait aussi substituer une de ces projections à l'autre, et alors la fig. II sera l'image d'une sphère placée avec son point de lumière la plus intense, et son ombre portée immédiatement contre un plan

vertical, pour la détermination desquels on se servira alors de la fig. I que l'on peut envisager comme étant un plan de projection horizontale et qui, à cause de la commodite de la représentation, pourra être dessinée au-dessous de la fig. II.

§ 384. — Si les sphères (*fig.* II et VI.) ne se trouvaient pas immédiatement placées contre les plans sur lesquels elles projettent leur ombre portée, mais, au contraire, plus ou moins distantes de ceux-ci, cela n'influera ni sur la détermination du lieu de la lumière la plus intense, ni sur la limite de l'ombre, ou sur la forme de l'ombre portée, quoique cette dernière change de plan, puisqu'elle s'éloignera d'autant plus de la sphère dans la direction de L ou *l*, que cette sphère sera plus éloignée du plan; il est bien entendu qu'on admet que les rayons lumineux conservent sur le plan horizontal et sur le plan vertical la direction admise dans la fig. 131.

§ 385. — Comme pour la détermination de l'ombre portée d'une sphère il ne s'agit en réalité, que de figurer l'ombre d'un cercle (puisque la limite de l'ombre qui produit cette ombre portée est toujours un cercle, quand même, eu égard à sa position par rapport aux rayons lumineux, elle apparaitrait dans la projection, sous forme d'une ligne droite ou d'une ellipse); on devra donc suivre les règles déjà indiquées, lorsqu'il s'agira de déterminer l'ombre portée d'une sphère sur *un plan incliné* ou sur *une surface courbe*. En effet, dans tous les exemples de ce genre précédemment admis, il ne s'agissait que de trouver *l'ombre de points* lorsque leur position vers les plans co-ordonnés, ainsi que la direction des rayons lumineux était donnée, sans s'inquiéter de savoir si ces points appartiennent à un cercle, ou à une ellipse, ou à une ligne droite. Si, par exemple, dans la fig. 121, l'hexagone ABCDEF était un cercle ou une ellipse, on déterminerait alors les points d'ombre *a,b,c,d,e* et *f*, de la même manière que cela a été indiqué, seulement dans ce cas ils ne suffiraient pas pour atteindre le but, et on devra chercher encore d'autres points à l'aide du même procédé puis les relier par une courbe qui ne sera pas dans ce cas une ellipse, ce qui est facile à comprendre.

§ 386. — On pourra déterminer de la même manière l'ombre et l'ombre portée d'une demi-sphère ou de toute autre portion de sphère, car tout ce qui a été dit jusqu'ici leur sera applicable. Mais pour l'étude, il sera bon de chercher les ombres portées que les demi-cercles représentés dans la fig. 127 et 128 projettent sur le plan vertical. Elles apparaîtront sous la forme d'un cercle et d'une ellipse, ainsi qu'on peut aussi le voir dans la fig. 131, II et VI. En effet, si dans la fig. II, on doit représenter l'ombre portée de la demi sphère QRK (*fig.* I), elle se montrera sous la forme d'un cercle $q\gamma r\gamma'$ et sous celle de la demi-ellipse $\gamma\, a'\, \gamma'$, et si l'on devait représenter dans la fig. VI l'ombre portée de la demi-sphère QR *e*, elle apparaîtra alors sous la forme d'un cercle *qc' rc'* et sous celle de la demi-ellipse *c'* F *c"*.

§ 387. — Finalement, tout ce qu'il y aurait encore à ajouter sur la manière de représenter avec exactitude une distribution d'ombres et de lumière sur une sphère (lorsque le lieu de la lumière la plus intense et la limite de l'ombre sont déjà trouvés) trouvera sa place dans la suite de cet ouvrage lorsque nous ferons connaître les règles qu'il faut suivre pour le *lavis* des dessins (*Voyez* § 179).

Nous ferons encore remarquer que les constructions indiquées pour la fig. 131 restent en général les mêmes, quand même les rayons lumineux arriveraient sous un angle différent. Nous recommandons à celui qui apprend le dessin des exercices de ce genre, attendu que la direction du rayon lumineux admise ici n'est pas celle qui est choisie pour tous les cas, et qu'en second lieu, en admettant pour ce rayon lumineux des directions différentes, il peut en résulter matière à des considérations instructives et très intéressantes.

§ 388. — *Problème*. Indiquer l'ombre portée projetée par un cylindre ADEB sur un sphère FGHI (*fig.* 132), lorsque les rayons lumineux arrivent dans une direction quelleconque *l* e t *l*.

Solution. — On mènera sur le plan horizontal les tangentes K' *s* et M'*q* parallèlement à *l'* et on projettera les points K', et M' sur la ligne correspondante AB du plan vertical en K et M. Après cela on se représentera les plans perpendiculaires

élevés sur K′ s et de M″ q, qui formeront, en coupant la sphère FGHI, des ellipses, dont on ne peut voir ici que les moitiés *trt* et *pnp*, on les coupera en *k* et *m′* par des parallèles menées avec *l*, et on aura ainsi sur la surface de la sphère, les points d'ombre de K et M. On trouvera, en suivant le même procédé, les points d'ombre *a*, *c*, *m*, *b*, *c′* et *k′* qui, reliés ensemble par une courbe déterminent sur la surface sphérique l'ombre portée du cercle AB. Les lignes K *u′* et M *v′* (dont les points K′ et M′ sont les projections) sont les côtés du cylindre auxquels sont tangents les rayons lumineux qui se trouvent dans les plans lumineux K′ *s* et M *q′*, et qui déterminent sur la sphère les lignes d'ombre *krt* et *m′np*, de telle sorte que *kru* et *m′nv* marquent les limites de l'ombre portée du cylindre jusqu'au point où il se confond avec la limite de l'ombre figurée par $\alpha\gamma\beta$.

Si l'on projette les points *k*, *c*, *m*... du plan vertical sur le plan horizontal dans les lignes correspondantes *r′ s*, *n′ q*, etc., qui sont là les projections des plans lumineux, c'est-à-dire en *k′*, *c′*, *m′*..., et si on relie ces points par une courbe; on obtiendra alors le contour de l'ombre portée que le cercle A′C′ B′C″ projette sur la partie supérieure de la surface sphérique. Les lignes droites K′ *k′* et M′ *m′* forment avec *k′ m′ m″* sur le plan horizontal et sur la sphère dans le plan horizontal les limites de l'ombre portée (1).

§ 389. Si le cercle AB (*fig.* 132), au lieu d'avoir sur les plans horizontal et vertical une position telle qu'il apparaît sur le premier sous forme de cercle, et sur le second sous forme de ligne droite, avait par rapport à ces deux plans une inclinaison double (*fig.* 30, § 167), on trouverait alors ces points d'ombre à l'aide de la construction indiquée au paragraphe précédent. Mais alors on pourrait aussi envisager ce cercle qui

---

(1) Les courbes *k′ m′* et *k″ m″* ou bien les ombres du cercle AB et A′B′ sur la surface de la sphère, marquent la ligne d'intersection qui résulte de l'intersection d'une sphère par un cylindre oblique dont AB serait la base. Par le procédé indiqué ici, on voit encore comment on trouve de semblables lignes d'intersection (*Voyez* § 181).

se montre sous forme d'ellipse, comme étant la limite de l'ombre d'une sphère quelconque (*fig.* 131 III et IV.), et par là trouver la limite de l'ombre portée que projette une sphère sur une autre sphère.

Mais de même que par le procédé indiqué dans le paragraphe 388. fig. 132, l'ombre d'un cylindre sur une sphère nous a conduit à trouver l'ombre d'une sphère sur une sphère; de même, on pourra trouver, par le même procédé, la construction nécessaire pour déterminer l'ombre portée que projette un corps quelconque sur la surface de la sphère. Car si sur ce corps, on connaît les lignes dans lesquelles sa surface se trouve atteinte par les rayons lumineux, c'est-à-dire lorsqu'on a trouvé sur lui les limites de l'ombre, on pourra alors aussi choisir dans ces deux projections des points correspondants sur ces lignes limites, et déterminer, à l'aide du procédé en question, les ombres de ces points sur la surface de la sphère, et de cette manière figurer chaque ombre portée.

§ 390. — *Problème.* — Un cylindre de forme annulaire (le tore) A B et A' C' B' (*fig.* 133), est éclairé par les rayons lumineux parallèles avec l et l'; on se propose de trouver, sur la surface courbe de ce cylindre, la limite de l'ombre.

Solution. — Il s'agit de nouveau de déterminer, sur la surface courbe de ce corps, les points de tangence des rayons lumineux, c'est-à-dire, de trouver la ligne suivant laquelle le cylindre lumineux qui enveloppe le corps, touche sa superficie. Si l'on se rappelle ce qui a été dit au § 379, à propos de la détermination de la limite d'ombre d'une sphère, il sera alors facile, en connaissant bien la construction employée pour la fig. 133, de figurer la limite d'ombre cherchée $p\,q\,r$. Car de même qu'on a pu former sur le plan horizontal, à l'aide du rayon lumineux T' g', la courbe $m\,k\,h\,n'\,m'$ du plan vertical et qu'on a obtenu le point k' qui est le point de tangeance du rayon T G à cette courbe dans sa projection sur le plan vertical, de même aussi on pourra trouver les autres points de contact. Le lieu de la lumière intense se trouvera là où la surface courbe sera frappée verticalement par les rayons lumineux, comme cela a été figuré par le point p dans la fig. 131. IV.

En général, il faut encore remarquer premièrement, que les points p et r, fig. 133, sont trouvés en menant aux demi-cercles DAD' et EBE' des tangentes parallèles à l (1): Secondement, que le point q est la projection du point q', suivant lequel le demi-cercle A'C'B est touché par la tangente. Troisièmement, que les lignes courbes d'intersection sur le plan vertical dont les projections sur le plan horizontal sont les rayons lumineux passant par r' et w', sont touchées en deux points par les rayons lumineux et déterminent par suite chaque fois sur le plan vertical deux points de la limite d'ombre. Quatrièmement, que l'on trouvera d'autant plus exactement les lignes d'intersection, comme mhm, par exemple, que l'on mènera sur le plan vertical un plus grand nombre de parallèles à AB, dont les projections seront sur le plan horizontal des demi-cercles concentriques (comme c'est le cas pour ab et $a'c'b'$). Cinquièmement, que si on se représente un plan horizontal passant par AB, et si l'on suppose que la moitié supérieure AFB soit enlevée et que la moitié inférieure AoB forme un bourrelet, on voit que l'on aura aussi déterminé par suite la limite de l'ombre du bourrelet par la courbe pcq (*Voyez* § 459). Sixièmement, enfin, que pour trouver l'ombre portée, projetée sur le plan vertical dans la projection verticale et sur le plan horizontal dans la projection horizontale, on est obligé aussi d'indiquer la limite de l'ombre sur ce dernier plan, et par conséquent suivre la voie connue. Le contour de l'ombre portée cherché est comme on le sait, la ligne d'intersection du cylindre lumineux indiqué plus haut avec le plan horizontal ou vertical, ou aussi avec tout autre plan qui est disposé de manière à recevoir l'ombre.

Mais comme nous allons donner, dans le paragraphe suivant, une solution plus simple et plus commode de ce problème, nous ne donnerons pas d'autres développements ici.

---

(1) On pourrait, à la rigueur, trouver p et r en menant sur le plan horizontal, par A' et B', la projection du rayon lumineux parallèlement à l', et en cherchant sur le plan vertical la ligne d'intersection correspondante. La différence qui en résultera sera à peine appréciable.

§391. — Pour comprendre la génération d'une surface cylindrique courbe de forme annulaire, on peut admettre que le cercle AD (*fig.* 134 I.), se meut autour du point C avec le rayon CF et décrit avec le point F un cercle. Mais on peut aussi admettre qu'une sphère dont AD serait le diamètre ait parcouru ce chemin, de telle sorte que son centre F décrive ce cercle avec le rayon CF. Alors un des grands cercles de cette sphère sera constamment touché dans les positions K', K'', K''', K''''... (*fig.* II.) de celle-ci, par la surface courbe de l'anneau, et la lumière de l'élément de contact de la surface annulaire coïncidera avec la lumière de la surface sphérique sur ce grand cercle. Si, d'après cela, on donne à la sphère (suivant ce qui se voit dans la *fig.* 131) la distribution de lumière et d'ombre qui lui appartient d'après la direction des rayons lumineux l et l'; et si on se représente cette sphère dans son mouvement comme arrivant successivement en K', K'', K''', K''''..., alors la limite de son ombre coupera chaque fois le cercle de contact de la surface annulaire en deux points, comme c'est par exemple le cas pour K' où le cercle de contact *ad* est coupé en h' et g par l'ellipse qui marque l'ombre de la sphère. Ces points appartiennent donc non seulement à la surface sphérique, mais en même temps aussi à l'élément de contact *ad* de la surface annulaire, et, par ce motif encore, ils appartiennent à la limite de l'ombre sur la surface annulaire. Ce que l'on a avancé ici, relativement aux points h' et g', peut naturellement s'appliquer aux points p' et q' de la sphère K''', comme aussi à toutes les autres positions de la sphère. C'est pour cela aussi qu'il n'est pas nécessaire de dessiner la sphère mobile dans ses différentes positions et de déterminer les limites de son ombre pour obtenir par là différents points de la limite d'ombre de la surface annulaire. On atteindra beaucoup mieux le but à l'aide *d'une seule* sphère, que l'on placera comme cela s'est fait pour K, de telle sorte, que son centre *o* soit en même temps le centre de l'anneau dans le plan horizontal, et dans cette supposition, on emploiera le procédé suivant pour déterminer la limite de l'ombre sur la surface annulaire.

Par le centre *o* on mènera autant de diamètres *ab*, *cc'*,

mn, etc., qu'on le jugera nécessaire pour la détermination exacte de l'ombre à la surface annulaire, on construira d'après la fig. 131 l'ellipse qui marque sur la sphère K la limite de l'ombre; on prendra ensuite avec le compas la distance $oh = og$, et on la portera sur le même diamètre *ab*, d'abord de *f* à *h'* et *g'*, puis de *f* à *h* et *g'*. On portera de même la distance $op = oq$ d'abord de *o'* vers *p'* et *q'*, puis de *o"* vers *p"* et *q"*. et on procédera ainsi pour tout autre diamètre passant par *o*. Si l'on relie alors ces points par la ligne courbe *mp'n*, *m'p'n*, *mq'n* et *m'q'n'*, on obtiendra la limite de l'ombre cherchée sur la surface annulaire, dont les deux premières se trouveront placé au dessus de l'anneau, et les deux autres au contraire au-dessous de lui.

Mais, non seulement on parvient à déterminer, à l'aide d'une distribution des ombres et de la lumière sur la sphère correspondante, la limite de l'ombre sur la surface annulaire, mais les différentes gradations de la lumière sur les parties éclairées de la surface annulaire seront en outre données par les parties correspondantes de la sphère, et les deux points les plus éclairés aux environs de *q'* et *q"* de la surface annulaire coïncideront avec les points les plus éclairés de la sphère.

§ 392. — Pour indiquer maintenant sur le plan vertical (*fig.* 134, I.) la limite de l'ombre, il sera nécessaire de projetter sur ce plan les courbes trouvées dans le § précédent, et faire attention que la portion *g'nt'q'h'* fig. II de la limite d'ombre vienne se placer, dans le plan vertical, sur la surface annulaire antérieure, et la portion *g'p'mh'* de cette même limite d'ombre à la surface annulaire opposée. Mais il est très facile de déterminer la projection des points *g'*, *n*, *h'* et *m*; car *g'* et *h'* se trouvent dans les cercles de contact *cb* et *ad*, c'est pourquoi les points G et H sont leur projection dans les cercles correspondants EB et AD. De même M et N sont les projections de *m* et *n*, parce que la ligne AB est la projection du cercle *acbc'*. Il ne s'agit plus que de projeter les autres points sur le plan vertical. Si on se représente dans la sphère *k* un cercle passant par le diamètre mené par *q* et *o*, et dans une position verticale et si on rabat ce cercle, alors le point *q*, qui est

le point d'intersection de la perpendiculaire *qq* avec la circonférence, donnera la distance du point *q* au diamètre de ce cercle tant en haut qu'en bas. Si on prend en suite cette ligne *qq* au compas, et si on élève auparavant en *q''* et *p''* (points correspondants à *q* et *p*), des perpendiculaires sur *xy*, et si sur ces lignes l'on porte ces distances de la ligne AB (*fig.* I), en-dessus et en-dessous, et d'abord vers Q, puis vers P, alors Q un des points de la limite de l'ombre qui est en avant, et P un autre point de la limite d'ombre qui est en arrière. On trouvera de même les points T et T' si l'on fait CT = CT' égal à la perpendiculaire *tt*, et on pourra, par la répétition de ce procédé, trouver autant de points que l'on jugera nécessaires pour la détermination de la limite d'ombre. La portion GNTQH de cette ombre se trouve sur la moitié de la surface annulaire qui est en avant, et la portion GPT'MH sur la moitié postérieure, et toute la courbe marque la ligne suivant laquelle la surface annulaire est touchée par le cylindre lumineux qui l'enveloppe.

On trouvera, par conséquent, de la même manière dans la fig. I la projection de la limite de l'ombre qui se trouve à la partie inférieure de l'anneau. Les points *g' n' h'* et *m'* de la fig. II donneront de nouveau, comme nous l'avons fait voir plus haut, les points G',N',H' et M' dans la fig. I. Les points T et T appartiennent à la fois à la limite d'ombre intérieure et extérieure; car, comme dans la fig. II *st'* a été fait = *st''*, alors la perpendiculaire *tt* servira aussi à la détermination du point *tt''* sur le plan vertical de même qu'elle a été employée précédemment pour la projection du point *t*. De même on prendra dans la fig. I la distance des points P et Q' de AB égale à la perpendiculaire *qq* de la fig. II, parce que *o'p'* est de nouveau = *o'q'*, ainsi que *o'q'* = *o'p'*, et l'on obtient ainsi dans la fig. I, en reliant tous les points cherchés, la courbe G'T'H'TG' comme étant la limite d'ombre qui se produit au-dessous de l'anneau, limite d'ombre dans laquelle le cylindre des rayons passant par l'ouverture circulaire touche la surface courbe intérieurement.

§ 393. — ***Problème.*** — Trouver ***l'ombre portée*** qui est projettée par un cylindre courbe de forme annulaire, tant sur le plan horizontal que sur le plan vertical (*fig.* 134).

Solution. — Les lignes d'intersection des deux cylindres lumineux avec le plan horizontal et le plan vertical, forment le contour de l'ombre portée. Mais comme la projection est donnée par la direction *l* et *l'* des rayons lumineux; et que les limites de l'ombre qui produisent cette ombre portée sont déjà trouvées sur les deux plans; alors on trouvera, d'après ce qui a été dit précédemment, la limite *mpn* et *mnn* de l'ombre portée dans la fig. II, telle qu'elle se produit à l'aide de la fig. I, sans qu'il soit nécessaire d'ajouter de nouvelles explications.

Si l'anneau ne se trouvait pas posé immédiatement sur le plan horizontal figuré par *xy*, mais plus ou moins éloigné de celui-ci, la construction resterait néanmoins la même, quoi que la forme de l'ombre portée puisse subir des modifications dans le cas où l'on aurait à déterminer les portions de son contour qui sont produites par les limites de l'ombre *mq'n* et *n'q'n'*.

Si l'anneau se trouvait placé immédiatement contre un plan vertical, et si on devait chercher l'ombre portée qu'il projette sur ce plan d'après les données admises ici, il faudra alors que la ligne *xy* (*fig.* I) soit tangente au point *c* (*fig.* II). Mais alors la construction se poursuivra de nouveau en suivant les procédés déjà connus, puisque les limites d'ombre qui engendrent l'ombre portée ont déjà été figurées, et cette ombre portée aura la forme de SS (*fig.* III), avec cette restriction qu'elle n'est projetée que par le demi-anneau *abca* (*fig.* II). Il sera, au contraire, nécessaire, ainsi que cela est facile à comprendre, de reproduire, mais dans une position inverse, la moitié inférieure de tout l'anneau, moitié qui est semblable à SS, et qu'on ne voit pas.

Si enfin l'anneau se trouvait éloigné du plan vertical, alors l'ombre portée ne subira pas de changement, seulement sa courbe supérieure tombera d'autant plus bas que l'anneau se trouvera plus éloigné du plan.

Si l'ombre portée est projetée sur un plan incliné ou sur une surface courbe, alors on exécutera les constructions convenables, en suivant les procédés indiqués précédemment, et il n'est pas nécessaire de donner ici d'autres éclaircissements.

La courbe G'TH' (*fig.* III) est la limite de l'ombre sur la face interne de l'anneau.

§ 394. — Si l'on a indiqué pour le problème du § 390 deux méthodes différentes de solution (*fig.* 133 et 134), c'est que celle indiquée pour la fig. 134, quelque commode et ingénieuse qu'elle soit d'ailleurs, ne peut être employée que dans les cas particuliers où la distribution des ombres et de la lumière des superficies courbes peut être ramenée à celle d'une sphère, c'est-à-dire où on peut se représenter les éléments de contact de tous les lieux de ces superficies courbes par un des grands cercles de la sphère. La méthode indiquée dans le § 390 est, au contraire, la plus généralement employée pour la distribution des ombres et de la lumière sur toute surface courbe, qu'elle soit produite par une ligne génératrice circulaire, elliptique, ou par toute autre ligne courbe. Dans tous les cas, en effet, on pourra, d'après les indications données dans la partie précédente de cet ouvrage, trouver, sur le plan vertical, la projection des lignes d'intersection qui forment sur le plan horizontal le plan lumineux, élevé verticalement sur la superficie courbe, et qui donnent, au moyen de la tangente menée à ces lignes d'intersection (parallèlement au rayon lumineux), les points par lesquels on devra mener sur le plan vertical la ligne limite de l'ombre. Ces points étant donc projetés dans le plan horizontal sur les rayons lumineux correspondants, y marqueront la limite de l'ombre, et on pourra trouver, à l'aide de tous ces points et des rayons lumineux, le contour de l'ombre portée sur les deux plans.

§ 395. — Si on résume tout ce qui a été dit jusqu'à présent relativement à la *détermination de l'ombre portée*, on verra qu'il s'agit toujours de choisir certains points soit sur le contour du corps portant ombre, soit sur les lignes limites de l'ombre, ou sur tous les deux à la fois, points dont on connait les distances verticales à la ligne de terre sur les plans vertical et horizontal, ou sur différentes projections du plan vertical ; puis de déterminer sur la surface sur laquelle l'ombre est projetée les *lieux* dans lesquels les rayons lumineux, en passant par ces lieux, atteignent celle-ci. Ces points marquent les ombres des points choisis précédemment, et lorsqu'on les réunit par des lignes droites, brisées ou courbes ils marquent la limite et surtout la forme de l'ombre portée.

Peu importe que la surface sur laquelle l'ombre est projetée, soit plane, soit parallèle au plan ou inclinée vers lui, ait une forme courbe, concave ou convexe; on est toujours à même de donner l'ombre de chaque point, lorsqu'on connait la distance verticale de ce point à la ligne de terre sur le plan horizontal et vertical.

On a fait voir dans les problèmes qui précèdent, et qui sont relatifs à la construction des ombres portées, comment on applique ces principes, aux différentes positions et formes des corps, et selon les directions différentes des rayons lumineux.

Un chacun pourra multiplier le nombre de ces problèmes, et les varier à l'infini pour s'exercer à la construction de ces ombres; mais pour atteindre ce but, nous conseillons de bien étudier auparavant les figures que nous avons données nous-même, et de chercher quelquefois aussi à les tracer sans le secours du texte, et de n'avoir recours à ce dernier que lorsqu'après plusieurs essais, on ne peut parvenir au but désiré.

Dans le chapitre suivant, nous montrerons comment on parvient, à l'aide du lavis, à représenter d'une manière exacte la distribution de la lumière sur les corps.

CHAPITRE IV.

—

Moyens employés pour rendre sensibles sur un dessin les effets des ombres et de la lumière. Des différentes opérations qu'il est nécessaire de faire pour achever complètement un dessin.

§ 396. — Dans le § 37 de la première partie de cet ouvrage, nous avons dit ce que l'on devait entendre par ces mots *lavis d'un dessin*; dans le chapitre III de la même partie, nous avons fait connaître les règles que l'on devait en général observer pour l'application des teintes et pour le lavis des surfaces, soit que l'on se serve de l'encre de Chine, ou de couleurs. Dans les paragraphes de cette dernière partie de l'ouvrage qui avaient quelque rapport avec ce sujet, nous avons fixé l'attention du lecteur sur l'influence que la lumière exerçait sur ces surfaces lorsqu'elles la reçoivent directement ou lui sont opposées; et enfin, nous avons indiqué la manière de représenter dans un dessin ces effets, peu importe quelle soit la position des corps par rapport au tableau ou lorsqu'ils projettent leurs ombres sur un autre corps. Il nous reste encore à faire connaître maintenant l'ensemble des procédés que l'on devra suivre lorsqu'il s'agit de donner, à l'aide du lavis, à un dessin déjà exécuté à l'aide de lignes, un jeu d'ombre et de lumière conforme à ce qui se voit dans la réalité. Or, l'emploi de l'encre de Chine ou d'une couleur noire pour atteindre ce but dans un dessin est justifiée par ce qui se voit dans la nature; car de même que les objets d'une seule couleur, et en particulier ceux d'une teinte claire, ne deviennent parfaitement intelligibles à l'œil qu'à cause de leurs différents tons et à cause de la gradation plus ou moins marquée de la lumière, de même on obtiendra dans un dessin, à l'aide des teintes variant du clair au noir et sans faire

emploi d'autres couleurs, l'effet nécessaire pour que l'on puisse reconnaître, par le contraste même de ces teintes, la forme exacte de l'objet.

§ 397 Les différentes opérations que l'on est obligé de faire subir à un dessin jusqu'à ce qu'il soit complétement achevé doivent se succéder dans l'ordre que nous allons indiquer.

Lorsqu'on sera fixé sur la grandeur que devra avoir l'*échelle*, sur le *nombre* des différentes *projections*, et sur les *détails* que l'on doit figurer, on déterminera avant toute chose les endroits qu'ils doivent occuper sur le papier. On observera dans cette disposition un certain ordre qui, jusqu'à un certain point, soit conforme à la réalité (en sorte que, par exemple, les projections verticales soient placées en haut les coupes au milieu, et les projections horizontales en bas). Il n'est pas rigoureusement nécessaire de suivre cet ordre, mais on fera bien de toujours adopter une disposition symétrique tant pour les vues d'ensemble que pour les détails; enfin il faut aussi que cette disposition plaise à l'œil.

Après cela, il sera nécessaire de donner aux objets qu'on se propose de représenter, et cela en vue de la distribution ultérieure de la lumière et des ombres, une position telle, par rapport à leurs plans de projections, que les parties qui doivent attirer plus spécialement l'attention soient tournées vers la lumière, tandis que celles qui le sont moins soient toutes ou en partie situées dans l'ombre. On arrivera par là et surtout par le contraste de l'ombre et de la lumière à faire ressortir les premières par les dernières. Dans des dessins où l'on represente les objets dans une position inclinée par rapport au plan, on devra surtout tenir compte de cette observation, enfin dans le choix que l'on fera de la position des objets à figurer, il faudra avoir égard d'avance aux teintes que l'on appliquera, afin d'obtenir par là le plus de netteté et le plus d'effet possible.

§ 398. Le dessinateur étant bien fixé à la suite de cet examen (et il ne devra pas trop se presser, attendu qu'un oubli ou une négligence serait difficile à rectifier et même souvent impossible), tracera sur les parties bien déterminées de sa feuille de papier suffisamment tendue, et en observant les

principes que nous avons indiqués dans la première et deuxième partie de cet ouvrage, les différentes projections de l'objet qu'il veut figurer d'après l'échelle admise. Pour exécuter convenablement les constructions jugées nécessaires, il aura recours au *compas*, à la *règle* et au *crayon*. Les dimensions devront lui être fournies soit par une esquisse, soit par des notes, soit par des avant-projets, etc. Il ne devra pas achever complètement chaque projection, mais commencer simultanément autant qu'il le pourra, les différentes élévations et coupes et plans, parce qu'il n'est pas rare de voir que beaucoup de mesures que l'on est obligé de prendre avec le compas, peuvent servir pour les différentes projections, que, d'un autre côté, en dessinant simultanément plusieurs de ces projections, on acquiert une connaissance plus exacte de l'ensemble, qu'enfin rien ne s'oppose à ce que certaines mesures puissent être transportées d'une projection dans une autre, et que souvent même cela sera plus commode, même nécessaire pour les constructions ultérieures qu'on aura encore à exécuter.

§ 399. — Ceci fait, on passera avec précaution à l'encre de Chine les lignes tracées au crayon, en ayant soin de faire un trait fin et bien égal. Nous avons donné dans la première et seconde partie de cet ouvrage les indications nécessaires pour atteindre ce but. Les traits que l'on passera sur les lignes des dessins destinés à être lavés doivent essentiellement être fins et pâles. L'exactitude de ces dessins ne pourra que gagner à la finesse de ces lignes, et ils plairont d'autant plus, qu'en effet, dans la réalité, les formes des objets deviennent reconnaissables, non par des arêtes ou des lignes bien noires, mais plutôt par le contraste entre la lumière et l'ombre. Et c'est pour cette raison qu'un dessin dans lequel les traits et le lavis sont trop noirs, ne paraît pas naturel. Pour qu'un dessin soit donc beau, il faudra ou ne pas passer les lignes à l'encre de Chine ou donner à celles-ci une teinte tellement pâle qu'elles puissent à peine se distinguer de la couleur des lignes tracées au crayon.

Si, du reste, nous avons donné comme règle, de ne pas déterminer de prime abord les projections, mais de les tracer à l'aide du crayon, puis de les passer à l'encre de Chine, c'était afin d'avoir la ressource de pouvoir corriger

plus facilement les fautes de construction. Mais nous ferons aussi remarquer qu'il y a des cas où il serait plus avantageux de terminer entièrement au crayon une ou plusieurs projections avant d'en tracer d'autres. Ce serait, par exemple, le cas pour les dessins d'objets compliqués et très nombreux, et où l'on aurait à craindre que l'une ou l'autre projection ne s'efface avant qu'elles ne fussent toutes terminées.

§ 400. — Après qu'on aura entièrement passé à l'encre de Chine les différentes lignes tracées d'abord au crayon, on les effacera en les frottant avec de la *gomme élastique*. Pour bien faire, on devra frotter avec la surface interne ou avec un des côtés de cette gomme, car la surface externe, qui est polie, ne jouit pas de la propriété d'effacer les lignes tracées au crayon ni d'enlever les saletés d'un dessin. On ne devra pas appuyer trop fortement et suivre autant que possible une même direction, par exemple, celle de gauche à droite. A défaut de cette substance, on pourra aussi se servir, pour effacer ces lignes, de *la mie de pain*; on devra faire attention de ne pas la choisir par trop tendre. Un dessin qui aurait été trop fortement frotté avec de la gomme pourrait difficilement être bien lavé, car le papier étant devenu trop rude et trop filamenteux, et ayant en outre perdu en partie son épiderme, il en résulterait que les teintes que l'on appliquerait n'auraient plus la même fraîcheur. On évitera aussi de frotter avec la gomme une partie d'un dessin sur laquelle on aura déjà appliqué une teinte, car on courerait le risque d'attaquer le papier et d'enlever de sa surface des pellicules qui produiraient des points blancs sur les parties teintées, ce qui nuirait infiniment à l'aspect du dessin. On ne devra donc se servir de la gomme que pour effacer les lignes tracées au crayon et toujours avant de teinter.

§ 401. — Avant de laver un dessin, on devra construire les ombres et les ombres portées, et cela d'après la direction admise des rayons lumineux, puis opérer d'après les règles données dans le chapitre précédent, et que l'on le trouvera encore dans les chapitres suivants. Dans ce but, on tracera dans toutes les projections, les lignes qui délimitent les ombres, à l'aide du crayon sans les passer au trait. Dans la projection horizontale ou la base d'un édifice, on évite ordinairement de

marquer les ombres portées ; parce qu'on suppose cette projection placée tellement bas, que ni les murs, ni les colonnes ou tout autre corps saillant puisse projeter d'ombre sur elle. En effet, les ombres portées prendraient fort inutilement une grande place sur ce plan, et rendraient en outre le dessin très confus. Il y a cependant une exception à faire pour les escaliers dont on indique mieux les marches et la position lorsqu'on trace leurs ombres.

Lorsqu'on aura terminé le tracé de toutes les ombres, on appliquera sur elles une ou plusieurs teintes avec une encre de Chine pas trop pâle ; ayant soin de suivre pour la construction des ombres portées ce qui a été dit au sujet des figures desquelles on s'est servi dans le chapitre précédent. Il faudra d'abord suivre avec exactitude les contours des corps et les limites des parties situées dans l'ombre et celles des ombres elles-mêmes qui ont été tracées au crayon ; en second lieu, on lavera doucement avec le pinceau à eau celles de ces lignes qui auraient reçu une trop grande quantité de couleur ou seraient trop foncées ; cette petite opération devra se faire tandis que ces lignes sont encore mouillées, surtout lorsqu'elles marquent la limite de l'ombre sur une surface courbe. Ainsi, par exemple, on ne laissera jamais subsister d'une manière aussi tranchée les limites de l'ombre telles qu'elles sont représentées le long des lignes FG (*fig.* 112 e *k*, *fig.* 116 et 117 C' B' C' *fig.* 131), mais on les adoucira au contraire avec le pinceau pour pouvoir donner à la surface courbe une plus grande apparence de la rondeur qui lui est propre, comme on peut s'en convaincre par l'examen des fig. 137, 138 et 153.

Après que les teintes que l'on vient d'appliquer sur les ombres seront assez sèches, on effacera doucement avec de la gomme élastique (§ 400) les limites d'ombre qu'on avait tracées d'abord au crayon, en ayant b en soin de ne pas attaquer le papier.

Comme on peut déjà le prévoir, il sera nécessaire de se servir, pour la construction des ombres, d'un crayon bon et tendre, de le manier avec légèreté, et surtout de tracer le plus petit nombre possible de lignes de construction. Si par hasard la construction des ombres exigeait un grand nombre de lignes

auxiliaires, on pourra cependant conserver au dessin toute sa netteté en construisant d'abord ces ombres sur une feuille séparée, puis en reportant sur le dessin les lignes trouvées (§ 6, 7, 246 et suivants); mais pour cela il ne faut pas se laisser rebuter par la peine et par le temps que cela exige, surtout si l'on veut rendre l'ombre d'une manière très exacte.

§ 402. — Après avoir appliqué sur les ombres une teinte avec l'encre de Chine, on suivra, pour mieux les achever, les instructions que nous avons données dans le premier chapitre de cette partie-ci de l'ouvrage. On les renforcera donc là où, d'après leur nature, elles doivent apparaître plus sombres; on les arrêtera bien, sans toutefois leur laisser former un rebord d'encre de Chine ou d'eau, ce qui leur donnerait un aspect dur et peu naturel. L'encre dont on devra se servir devra avoir à peu près le même ton que celle appliquée d'abord sur toutes les ombres. Ainsi, par exemple, dans la fig. 128 on renforcerait l'ombre le long de D *a* A' jusqu'à un quart environ de sa largeur (c'est-à-dire, jusqu'au premier quart de la ligne *a* A), et on fondrait vers A, attendu que l'ombre qui se produit ici devient plus claire vers A à cause de l'effet du reflet. Sur des surfaces convexes, au contraire, on placera les limites d'ombre, de telle sorte, qu'une portion de la teinte se trouve à droite et l'autre à gauche de la ligne limite, ou lorsqu'il s'agit d'une position horizontale qu'une portion de la teinte soit placée au-dessous et l'autre au-dessus de cette ligne; que si par exemple la ligne F G (*fig.* 112) se trouvait dans le milieu, alors on la fondra également des deux côtés (§ 299). Après avoir répété un certain nombre de fois cette opération pour les ombres qui ne doivent pas recevoir uniformément le même ton et lorsqu'on pense avoir donné l'expression nécessaire, on s'occupera alors des parties claires des surfaces convexes et concaves (§ 300 et 305), à cet effet on appliquera sur les parties où la lumière doit apparaître plus mate, des teintes plus pâles, et on les dégradera jusqu'aux points où elle doit apparaître le plus clair, autrement dit là où apparait la lumière vive et jusqu'à ce qu'enfin ces surfaces reçoivent le ton représenté dans les fig. 127 II, 138 II et 139 II. Mais pour l'opération en question, il est encore nécessaire d'observer ce qui suit :

§ 403. — Dans la nature, l'ombre portée *c d g h* (*fig.* 135) est toujours plus sombre que l'ombre *a b c d* qui lui correspond, parce que la partie *g h f e* de la surface *c d e f* qui est éclairée par les rayons lumineux parallèles avec *l*, peut à la vérité éclairer par reflet la surface *a b c d* qui est située dans l'ombre, mais elle n'éclairera pas l'ombre portée *c d g h* qui se trouve avec elle sur un même plan (§ 284). C'est pour cette raison *que les ombres portées devront toujours recevoir une teinte plus foncée que les ombres correspondantes*, à moins qu'exceptionnellement on ne voulût tenir compte de la couleur locale et par suite donner aux deux ombres une teinte égale ou même faire *a b c* plus foncé que *c d g h*.

L'expérience suivante pourra servir à justifier la vérité de notre dire. On forme à l'aide d'une feuille de papier blanc un système de plans ayant l'un par rapport à l'autre la position représentée dans la fig. 135, et on distribue sur eux les ombres, suivant la direction des rayons lumineux admis pour cette figure. Si ensuite on recouvre la surface *c d e f* avec un papier colorié, en rouge ou en vert par exemple, l'on verra que la surface *a b c d*, qui se trouve dans l'ombre, aura la même teinte, ce dont on pourra se convaincre d'une manière encore plus particulière en enlevant vivement ce papier coloré; car on apercevra de nouveau sur *a b c d* la teinte primitive.

Disons encore que les surfaces qui se trouvent dans l'ombre doivent être maintenues d'autant plus claires, qu'elles sont mieux placées pour recevoir la lumière réfléchie, ou le reflet des surfaces éclairées.

§ 404. — Plus un corps se trouvera situé près de la surface sur laquelle il projette son ombre, plus son contour sera mieux déterminé, et plus elle sera foncée, *et vice versa;* plus ce corps se trouvera éloigné, moins la ligne qui marquera l'ombre portée sera déterminé, et moins sa coloration sera foncée. Ainsi, par exemple, dans la fig. 106, le contour de l'ombre portée de la croix apparaîtra d'autant plus tranchée et celle-ci d'autant plus intense, que la distance G' A' sera plus petite, *et vice versa*. La cause de ce phénomène que l'on peut aisément observer dans la nature provient en partie de la réflexion ou de la réfraction des rayons lumineux, et en partie

de la coloration des couches d'air qui, dans les cas de grandes distances, peuvent produire des effets très marqués sur la distribution des ombres et sur leur coloration.

On maintiendra donc dans un dessin les ombres portées qui sont projetées par des corps placés à proximité, bien plus foncées que celles qui le sont par des corps plus éloignés, enfin on leur appliquera un nombre de teintes d'autant plus grand qu'elles se trouveront plus rapprochés du corps qui projette l'ombre. Les ombres portées qui sont projetées sur une surface plane parallèle avec le tableau, par un corps qui se trouve appliqué directement contre cette surface, ne devront pas être teintées uniformément, d'après les motifs indiqués plus haut; mais elles devront être fondues à partir du corps qui projette l'ombre jusqu'à la limite de celle-ci, ainsi qu'on le voit, par exemple, dans les fig. 110, 138, 139, 152, etc.

Mais, comme il pourrait naître une certaine incertitude pour l'observateur et que ce dernier, en procédant de la sorte, pourrait supposer que l'ombre se projette sur un plan incliné, lorsqu'en réalité elle se projette sur une surface parallèle avec le tableau, il s'ensuit qu'on passe sur ces ombres des teintes tout unies. Cette dernière manière de procéder n'est nullement défectueuse, aussi nous en sommes-nous servi pour plusieurs figures. Mais comme l'incertitude en question ne peut avoir lieu que lorsque l'ombre portée recouvre une surface entière, car s'il en était autrement, la partie qui se trouve dans la lumière indiquerait quelle est la véritable position de cette surface, il sera alors aussi plus conforme à la nature et plus favorable pour l'aspect du dessin, de fondre légèrement les ombres portées vers leur extrémité, et par conséquent de les maintenir plus foncées près des corps qui projettent l'ombre que vers leurs limites.

§ 405. — Lorsque la lumière part d'un corps lumineux (condition qui est admise pour tout dessin géométrique), jamais alors une *ombre qui tomberait dans une autre ombre, sera reconnaissable, parce qu'une ombre ne peut être aperçue dans une ombre.* Si dans la fig. 118, la ligne *e f* est la limite de l'ombre sur le cylindre C, alors l'ombre portée du prisme K, ne pourra arriver que jusqu'à *e f*, et devra se confondre

dans cette ligne avec l'ombre. De même dans la fig. 132, l'ombre portée du cylindre ne pourra pas dépasser la limite $\alpha \gamma \beta$ de la sphère, mais devra se confondre en *u v* avec elle. La même chose a lieu dans les fig. 137 et 138, ou l'ombre portée du plateau ne peut être visible sur le cylindre que jusqu'auprès des lignes verticales qui forment les limites de l'ombre et ainsi de suite. Ces lieux, où l'ombre portée vient se confondre dans l'ombre, sont obtenus par la construction même, puisque celle-ci ne permet pas de prolonger la ligne limite de l'ombre portée au-delà du lieu où elle se confond avec l'ombre, ainsi que cela est bien visible dans les fig. 137 et 138. S'il apparaît donc dans un dessin des ombres portées qui arrivent jusqu'à l'ombre, on commencera alors par donner aux deux ombres une seule teinte, ainsi que nous l'avons dit au § 401, puis on enlèvera tout doucement avec le pinceau à eau le rebord dur de l'ombre propre.

D'après ces motifs encore, l'ombre portée qui est projetée sur le mur par la poutre K, placée à gauche (*fg.* 149), ne devra pas se distinguer de l'ombre portée de la corniche, ni de l'ombre portée qui est projetée sur le mur postérieur de la niche, mais apparaître là comme étant une continuation de l'ombre de la niche elle-même. Il serait faux de croire, d'après ce qui a été dit il y a un instant, que le lieu de l'ombre portée qui est projeté par la poutre et par la corniche où par la poutre et par la niche, c'est-à-dire par deux corps à la fois, et dont les ombres apparaissent comme étant superposés l'une sur l'autre, doivent aussi apparaître plus foncés en ces lieux; on pourra journellement voir le contraire dans la nature.

Si donc deux ou plusieurs ombres viennent à tomber, l'une sur l'autre, elles ne produiront pas, dans les endroits où a lieu cette fusion, un renforcement de l'ombre principale, mais celle-ci recevra une seule teinte, parce que, ainsi qu'on l'a fait remarquer plus haut, une ombre ne peut être appréciable dans une autre ombre. C'est aussi pour cette raison que l'ombre portée que le prisme projette sur la surface courbe *m n o p* (fig. 108) devra être une surface unie, et comme étant produite par une seule surface sans avoir égard aux dif-

férentes faces du prisme qui projettent chacune leur ombre. La même observation peut aussi être appliquée à la fig. 106, 138, 139, et à beaucoup d'autres encore.

§ 406. — Après avoir bien suivi les instructions données dans les § 403 à 405, on lèvera avec une encre de Chine d'une teinte pâle les surfaces qui se trouvent en partie ou en totalité dans la lumière, en se conformant du reste à tout ce qui a été dit à ce sujet dans les § 276, 277 et 280. Afin d'éviter le plus possible les cernures d'encre qui défigurent toujours un dessin, et pour donner en même temps aux surfaces que l'on lave la plus grande pureté, on n'appliquera pas du premier coup la teinte toute noire sur les surfaces, qui, d'après les indications des § 270 et 277, doivent être maintenus plus sombres; mais on appliquera tout d'abord sur elles la même teinte que l'on a préparée pour les surfaces plus éclairées, puis après on reviendra à plusieurs reprises pour les forcer, et cela autant de fois qu'il en sera besoin.

De même, on appliquera en même temps les ombres portées et les ombres propres, lorsque les surfaces sur lesquelles elles se trouvent, doivent être plus foncées. Non-seulement la clarté et la transparence des ombres gagnent à cela, mais on évite encore par là de produire des rebords d'encre, ce qui serait impossible si l'on ne voulait teinter que jusque contre la limite d'ombre les lieux qui se trouvent dans la lumière.

On a déjà fait remarquer dans le § 309 qu'il fallait teinter toutes les surfaces et qu'aucune ne devrait rester complètement blanche, quelque rapprochée qu'elle soit d'ailleurs, et quand même les rayons lumineux viendraient la frapper à angles droits. Il faut néanmoins procéder avec prudence dans le lavis de ces surfaces éclairées, toujours tenir compte de leur position par rapport aux rayons lumineux qui les frappent (§ 270), et de leurs éloignements respectifs (§ 277); avec cela veiller à ce que l'ensemble du dessin n'y perde pas, que les surfaces les plus éloignées, comme aussi celles qui reçoivent la lumière sous des angles très aigus, ne deviennent pas trop noires et même que les surfaces qui, par les raisons expliquées plus haut, doivent être maintenues plus sombres, apparaissent cependant toujours comme se trouvant dans la lumière,

attendu qu'une surface qui se trouve placée dans la lumière ne peut jamais être aussi sombre que celle qui se trouverait dans l'ombre, en admettant toutefois que toutes deux elles aient la même couleur locale.

§ 407. — Examinons encore le cas suivant :

Les lignes A et B sont les projections de deux surfaces, dont la première se trouve plus rapprochée de l'œil que la seconde, par contre, la position de celle-ci est telle, qu'elle reçoit la lumière suivant un angle qui se rapproche plus de l'angle droit; on peut alors se demander quel ton il faudra donner à ces deux surfaces dans un dessin? D'après le § 277, il faudrait, en effet, que A fût plus clair que B, et d'après le § 270 que B fût à son tour plus clair que A. La réponse la voici : Dans les cas les plus ordinaires, la surface B devra être maintenue plus claire que la surface A. Car si on compare l'effet qui est produit par la lumière divergente, dans le cas où les rayons arrivent plus perpendiculairement, à l'effet qu'elle détermine sur les objets placés plus ou moins près de l'œil, on accordera la préférence au premier pour des distances de ce genre (qui d'ordinaire n'apparaissent que dans des dessins géométriques), attendu que ce ton est justifié par les lois de la nature, tandis que le second qui est exécuté d'après le § 277, ne repose que sur des hypothèses. Il peut naturellement y avoir des exceptions, par exemple lorsque la distance de A et B est très sensible, et que la différence de l'angle du rayon lumineux est très petite, ou bien que la couleur locale de A est bien plus claire que celle de B et ainsi de suite. C'est au dessinateur à bien peser tout cela pour pouvoir obtenir un résultat satisfaisant.

Ce que nous venons de dire peut aussi s'appliquer aux parties ombrées d'un dessin, seulement dans un ordre inverse. Si les deux surfaces A et B se trouvent dans l'ombre, alors la lumière indirecte déterminera un effet plus faible sur B que sur A si B devait recueillir plus de lumière directe que A, par suite B devra être maintenu plus sombre que A. Mais si la surface marquée par A se trouvait située plus loin que B, et que B' fût plus éclairé que A par la lumière de réflexion, il faudra alors que B soit maintenu plus clair que A, la couleur

locale étant la même. Ceci deviendra encore plus évident par ce que nous allons dire dans les paragraphes suivants.

§ 408. — On trouvera ce qui est relatif aux autres opérations nécessaires pour achever les parties ombrées quant à ce qui concerne les effets de la lumière de réflexion ; en se rappelant tout ce qui a été dit à ce sujet dans les § 290 à 293, et surtout en observant les principes indiqués au § 293. Les surfaces qui se trouveront dans l'ombre seront donc maintenues d'autant plus claires, que par leur leur position elles sont plus aptes à recevoir la lumière réfléchie, et maintenues d'autant plus sombres que cette lumière aura moins d'influence sur elles (§ 407).

§ 409. — On maintiendra les ombres des surfaces les plus éloignées, *plus claires* que celles des surfaces qui sont plus rapprochées. Car si la lumière des parties les plus éloignées décroît dans le rapport indiqué dans les § 275 et 277, et aussi, d'autre part, à cause d'une plus grande masse d'air qu'elle a à traverser ; ce qui les fait, par conséquent, paraître plus sombre que celles qui sont plus rapprochées ; il faudra donc, pour se conformer à ces principes, ne pas faire l'ombre située sur les parties les plus éloignées aussi forte et aussi tranchée. D'après cela, elle *devra être maintenue plus claire sur les sufaces les plus éloignées, et cela proportionnellement à leur éloignement* ; et ne pas se distinguer d'une manière aussi tranchée de la lumière, ainsi que c'est le cas pour les parties plus rapprochées.

C'est pour cette raison qu'on lave dans un sens inverse, suivant les indications du § 293, les surfaces inclinées qui se trouvent complètement dans l'ombre. Si elles se trouvaient, au contraire, dans la lumière, et étaient en partie recouvertes par une ombre portée, on commencera par laver la surface entière, y compris l'ombre portée, comme si cette surface était en entier dans la lumière. Ensuite, et lorsque le tout sera sec, on lavera l'ombre portée en sens contraire.

Si une ombre portée est projetée sur surface courbe, par exemple sur un cylindre, on agit d'abord comme si cette surface se trouvait partout dans la lumière, sans faire attention à l'ombre portée, puis ensuite on s'occupe, en particulier,

de l'ombre portée ; on la maintient le plus sombre là où la lumière est la plus brillante sur la surface cylindrique. A partir de cet endroit, son intensité décroit insensiblement vers l'ombre propre, jusqu'à ce qu'elle l'ait atteint et vienne se confondre avec sa teinte. On agirait de même pour l'ombre portée projetée sur un cône, sur une sphère ou sur d'antres corps à surfaces courbes, comme on peut du reste s'en convaincre par l'examen des figures suivantes.

§ 410. — Quoique cette diminution d'intensité de l'ombre proportionnée aux distances, procure dans un dessin l'avantage de pouvoir juger immédiatement lesquelles des parties qui étant situées dans l'ombre sont les plus rapprochées, et celles qui sont les plus éloignées, de la même manière qu'on a pu le faire pour les parties qui sont placées dans la lumière, seulement en sens inverse ; il ne faut pas cependant prendre la chose trop à la lettre et produire des contrastes trop choquants, parce que pour des dessins appliqués aux arts, on a rarement à faire à des objets très éloignés les uns des autres. Dans un dessin de perspective, au contraire, la lumière peut, à cause des distances, devenir à la fin, tellement sombres et l'ombre tellement claire, qu'elles peuvent à peine se distinguer l'une de l'autre. Dans de pareils cas, les objets qui se trouvent sur le fond du tableau se distinguent moins que ceux qui sont situés sur le premier plan où la lumière et l'ombre se séparent d'une manière tranchée, et c'est de là qu'il vient aussi que dans un dessin de perspective on doit maintenir dans le premier plan les parties ombrées plus sombres que celles du fond, où non seulement les dégradations de la lumière et de l'ombre, mais même les contours des objets et leur couleur deviennent très difficiles à reconnaître, et où enfin les objets se rapprochent plus ou moins de la coloration de l'air.

§ 411. — Il faut surtout veiller à ne pas faire dans un dessin les ombres par trop sombres, on devra procéder avec goût et avec prudence, mettre tout son soin à les rendre avec exactitude. On ne peut assez recommander, dans ce but, l'étude de la nature, car c'est de la vérité avec laquelle on exécute les ombres, sous le rapport de leur forme, de leurs tons et de leurs couleurs diverses, que dépend aussi en grande partie la

vérité et l'effet d'un dessin. Un contour doux et ferme, une grande transparence, un ton pur et agréable, des oppositions vigoureuses dans les parties les plus sombres, des transitions douces et bien nettes cependant, des reflets pas trop crus, donnent aux ombres d'un dessin un aspect agréable et qui est à la fois conforme à la nature. D'un autre côté, les différentes teintes appliquées sur les parties lumineuses d'un dessin, doivent également s'accorder avec ce qui se voit dans la nature et s'harmoniser entre elles, elles doivent aussi être suffisamment déterminées, sans se détacher avec dûreté, et l'on doit à l'aide du lavis former des transitions délicates et douces. Les portions éloignées doivent être tenues plus sombres que celles qui sont rapprochées, de même aussi les surfaces sur lesquelles le rayon de lumière tombe suivant un angle qui se rapproche le plus de l'angle droit, doivent recevoir une lumière plus brillante. On suit une loi inverse pour la détermination des teintes dans les parties ombrées. En un mot, dans le lavis d'un dessin géométrique, on met à profit, tant dans les parties situées dans la lumière que dans celles situées dans l'ombre, les règles de la perspective aérienne autant que la nature, les proportions et le but de ces dessins le permettent. Plus on apporte de soins et de précautions à cela, plus d'autre part on tient compte des observations indiquées plus haut, plus alors le dessin sera beau et vrai, plus on se rapprochera de ce que l'on voit dans la nature. Celle ci et l'étude d'un dessin parfaitement lavé sont pour les commençants le meilleur maître (en admettant toutefois que les principes du lavis leur soient connus), pour leur apprendre à comprendre et à apprécier les dessins qui sont mis sous leurs yeux.

§ 412. — Un dessin gagne d'ordinaire en beauté et en élégance, si dans le lavis on sait appliquer à propos et avec goût ce que l'on nomme des *touches*.

Les *touches* d'ombres sont les parties les plus noires des ombres et qui tranchent d'ordinaire sur le ton ombré qui les environne, parties qui, sans être dures, contribuent beaucoup non seulement à la clarté et à la beauté des teintes, mais encore représentent plus nettement les différentes formes des objets figurés. Une étude suivie de la nature et l'examen de

dessins bien faits apprendont à trouver les points où elles doivent être appliquées sur un dessin.

§ 413.—Si après qu'un dessin aura été lavé à l'encre de Chine, on veut encore en expliquer des couleurs, on suivra alors les règles données dans les § 38 à § 43,. Nous ferons observer ce sujet : Que, malgré que nous ayons dit dans les § 309 et 406, que toutes les surfaces d'un dessin doivent être teintées à l'encre de Chine, on pourra néanmoins faire une exception pour un dessin qui, après qu'il aura été lavé à l'encre de Chine, doit recevoir une application de couleurs. On pourra en effet négliger de passer une teinte sur les surfaces qui reçoivent la lumière la plus intense, et qui, dans un dessin à l'encre de Chine, recevraient une teinte plus pâle.

Si enfin l'on voulait exécuter un dessin à l'aide de couleurs sans se servir préalablement d'encre de Chine, et si on voulait obtenir immédiatement les effets de lumière et des ombres, à l'aide de ces couleurs seulement, alors le procédé qu'on devra suivre se rapprochera de la peinture et exigera une grande pratique, une habitude suffisante dans le maniement des couleurs et un goût éclairé. Si l'on était privé de ces connaissances préliminaires, le dessin qu'on fera laissera beaucoup à désirer sous le rapport de la clarté et de l'harmonie des tons.

414. — Le *tracé* des lignes au crayon puis à l'encre, et le *lavis*, sont les deux opérations essentielles qui s'offrent dans l'exécution d'un dessin géométrique, et pour lesquelles nous avons déjà fait connaître les principes et fait les observations nécessaires. Seulement nous devons encore ajouter ici, que l'on doit toujours apporter le même soin pour le *tracé* d'un dessin, quand même il serait destiné à être lavé ensuite. On se tromperait fort si l'on pensait qu'un semblable dessin, puisse être tracé avec moins de correction que s'il devait rester au trait. Il est vrai qu'un dessin d'un trait négligé pourra gagner à être lavé, surtout si cette opération est faite avec soin et habileté; il pourra même, vu à une certaine distance, produire un bon effet. Mais en le voyant de plus près, cette illusion s'évanouira tout aussitôt et ce dessin apparaîtra ce qu'il est, c'est-à-dire mal tracé, mais bien lavé; parce que les lignes

mal tracées, que ce soient des lignes droites, courbes, brisées ou mixtes, ne pourront être corrigées par le lavis des surfaces qu'elles contournent ou dans lesquelles elles se trouvent, et elles apparaîtront toujours telles qu'elles étaient avant le lavis.

§ 415. — Si l'on examine les deux cylindres (*fig.* 142 II), on trouvera que la portion de l'ombre qui se trouve sur le plus grand cylindre, situé horizontalement, immédiatement au-dessus du plus petit, posé verticalement, apparaît moins sombre que la portion de l'ombre placée à côté d'elle. Mais comme l'ombre du cylindre horizontal a été lavée également sur toute sa longueur (ce dont on se peut convaincre facilement lorsqu'on recouvre le petit cylindre jusqu'à la limite du grand); il s'en suivra que cet endroit moins sombre n'est produit que par une *illusion d'optique*, et que pour obtenir une ombre égale sur tous les points du cylindre horizontal, on devra faire en cet endroit, le lavis, un peu plus d'ombre que dans les autres. Cette illusion d'optique existe aussi dans la nature, et c'est pourquoi il faut laisser les endroits tels que nous les avons indiqués dans la fig. 142.

Il résulte en même temps de cet examen, que dans le lavis il est absolument nécessaire de tenir compte de semblables illusions lorsqu'il s'agit de la détermination des différents tons, et modifier d'après cela l'ensemble des lumières et des ombres d'un dessin. C'est par ces mêmes motifs qu'il arrive aussi souvent que les surfaces, qui d'abord paraissaient assez foncées, même trop foncées, deviennent ensuite trop claires lorsque les parties qui les environnent ont aussi reçu leur ton, parce qu'en lavant les surfaces environnantes, le ton qui d'abord se tranchait du papier blanc et qui paraissait alors trop sombre, ou du moins suffisamment sombre, se trouve ensuite adouci et plus clair qu'auparavant.

D'après ceci, on ne pourra se prononcer avec certitude sur les différents tons à donner aux parties d'un dessin qu'après que le dessin entier aura reçu ses teintes et sera lavé; et c'est aussi pourquoi il n'est pas bon de *terminer de suite complétement une portion du dessin, pour en commencer une autre et la terminer de même complétement*. Il sera en effet toujours difficile de donner dans ce cas à un dessin une harmonie agréa-

ble à la vue, c'est-à-dire d'établir entre les différents tons de tout le dessin, tant dans les parties lumineuses que dans les parties ombrées, les rapports nécessaires. Dans la plupart des cas, on sera obligé de repasser une ou plusieurs fois sur le tout, après que chaque partie aura été terminée séparément, afin d'atteindre cet accord des tons.

§ 116. — Pour terminer et en même temps pour résumer ce qui a déjà été dit dans différents endroits de cet ouvrage relativement au lavis, nous ferons la citation suivante, extraite d'un ouvrage bien connu :

« Le lavis est une sorte de transition entre le dessin fait au » trait et au crayon et la peinture. Un dessin peut être lavé lar- » gement où les teintes se fondre avec douceur ; il pourra par « les différentes teintes d'ombres qui sont tantôt claires, tan- « tôt foncées, représenter toutes les couleurs en tant qu'elles « contribuent à l'effet lumineux de l'ensemble. Dans cette ma- « nière de procéder on doit supprimer toutes les lumières du « papier blanc qui forme le fond du dessin. La chose essentielle « à observer dans le lavis, c'est de passer des teintes douces et « vaporeuses, de laver les ombres pendant qu'elles sont encore « humides, d'opérer délicatement et insensiblement les tran- « sitions de l'ombre et de la lumière ; de ne les retoucher que « lorsqu'elles sont bien séchées, et chaque fois faire ressortir « les masses les plus sombres par l'application graduelle de « teintes de plus en plus foncées. En retravaillant à coups de « pinceau et à petites portions de teintes fondues, on raccorde « les parties d'ombre qui d'abord ont été passées d'un seul « coup, et on obtient ainsi la transparence qui seule peut pro- « duire la rondeur et la profondeur. C'est enfin par un contour « aussi précis que correct, par des ombres grasses et adoucies, « et en dernier lieu par des touches vigoureuses dans les par- « ties les plus sombres et par des lumières conservées très pu- « res dans les endroits les plus clairs, qu'un lavis atteint sa « beauté.

« Tout ce qui vient d'être dit ici du lavis à l'encre de Chine, « s'applique aussi au lavis à la Sépia. Il est en effet indifférent « que la couleur soit noire ou brune ; le mode d'opérer que l'on « nomme *lavis* et dont l'aqua-tinta n'est qu'une imitation

« reste toujours le même. Le plus grand effet de ces dessins « lorsqu'on opère de cette manière, dépend surtout de la con« centration de la lumière et de beaux clairs obscurs, des petites « lumières éparpillées détruiseut tout l'effet. L'œil du con« naisseur se reposera avec d'autant plus de satisfaction sur « le dessin, qu'il y aura plus d'unité dans l'ensemble et « dans toutes les parties quelques nombreuses qu'elles soient.»

§ 417. — Quand le dessin est assez avancé et peut-être considéré comme achevé, on dessine au bas, dans un endroit approprié, l'*échelle* dont la longueur sera proportionnée à la grandeur des objets figurés. Il est évident que cette échelle doit être rigoureusement égale à celle qui a servi au tracé, et que l'on avait d'abord mise à part sur une planchette ou plutôt sur la règle, afin de mieux pouvoir prendre les mesures.

Enfin, on place en haut du dessin l'inscription ou titre convenable. Il ne faut pas considérer ce titre comme une chose insignifiante, attendu que s'il est mal fait, un dessin d'ailleurs bien fait se trouvera défiguré.

§ 418. — Enfin on entoure le dessin d'un cadre dont la distance à l'extrémité du papier dépendra de la grandeur de la feuille et de l'objet qui y est dessiné. Ce cadre donne au dessin une limite certaine et une position bien arrêtée. Il contribue aussi à son ornement s'il est propre et simple et lorsqu'il ne consiste qu'en deux lignes droites nettement tracées (dont l'une est fine et l'autre plus large); les lignes du cadre doivent être tracées avec une encre de Chine très-foncée et doivent se réunir dans les coins à angles droits, sans se dépasser ou sans laisser de vide entre elles. Il faut éviter de surcharger ce cadre d'une multitude d'ornements qui exigent beaucoup de temps, que l'on aurait pu employer plus utilement pour une plus belle exécution du dessin lui-même. Tout ce que l'on pourra se permettre, sera d'appliquer sur le papier qui forme le côté extérieur du cadre, une couleur, par exemple de l'encre de Chine, délayée dans beaucoup d'eau et mélangée avec un peu de jaune ou de rouge, ce qui procure aux parties du papier occupées par le dessin une coloration plus blanche et un aspect plus propre que celui quelles ont dans la réalité, par suite du contraste qui en résulte. Cela offre enfin encore

l'avantage d'empêcher le cadre de se salir par le fréquent attouchement de cette feuille.

§ 419. — Après que l'on aura tracé le cadre, on nettoyera proprement tout le dessin avant de le couper et le détacher de la planchette. Chaque dessin, grand ou petit, simple ou composé, étant un produit de l'art, devra comme tel présenter un but d'utilité, être clair et offrir en outre la précision et la beauté, mais il ne faut pas vouloir obtenir celle-ci au détriment des autres conditions. Pour qu'un dessin soit beau, il est nécessaire qu'il ait une apparence de pureté et d'élégance, et c'est pour cela que la propreté est une des conditions essentielles que l'on exige, tant durant le travail, qu'après qu'il sera fini. Nous avons eu soin de dire dans le § 400 que l'on se sert avec avantage de la gomme élastique pour effacer les lignes tracées au crayon et pour enlever la poussière sur le papier blanc qui entoure les surfaces teintées, mais que l'on doit se garder de frotter sur ces dernières.

Pour nettoyer le dessin entier, tant avant qu'après le lavis, on emploiera avec avantage les rognures de peau que l'on frotte doucement sur la surface du papier et qui enlèvent toute la poussière et les corps étrangers qui la salissent. Par là on ne court pas le risque d'attaquer les endroits teintés et lavés, et on enlève toute les saletés sans nuire au dessin.

Mais comme on ne trouve pas toujours de semblables rognures de peau, on pourra à leur défaut se servir de morceaux de peau de gants blancs qui jouissent des mêmes propriétés, pourvu qu'on frotte la surface du dessin avec le côté non lissé de cette peau, c'est-à-dire le côté intrene.

§ 420. — Si le papier avait reçu des taches d'encre ou autres et que l'on ne puisse les enlever soit à l'aide de la gomme élastique, soit à l'aide des rognures de peau de gants, ou bien encore si ce dessin avait été très sali pendant le travail, il devient alors nécessaire de le laver avec de l'eau pure et à l'aide d'une éponge très propre, mais cette opération ne pourra se faire que lors que ce dessin aura été passé au trait, c'est-à-dire avant qu'on commence à le laver avec l'encre de Chine. Ce lavage, étant pratiqué sur le papier avec une légère pression, est à la fois utile à tout le dessin. Car non-seulement on peut par là le la-

ver, mais encore on a un moyen de donner aux lignes qui auraient été tracées trop durement, plus de douceur et de netteté, en sorte que toutes elles apparaissant plus fines, plus pures, et plus nettes. Il ne faut pas espérer que par cette opération, les endroits devenus rudes par suite du frottement avec la gomme élastique ou que les filaments de papier qui ont été enlevés par le frottement, puissent être rétablis et former de nouveau une surface polie. Si en lavant on a par trop mouillé le papier, si on a par trop appuyé l'éponge et si on a par trop frotté, on perd encore ces avantages, car les lignes tracées deviendront trop pâles, et la surface du papier au lieu de recevoir un poli, deviendra rude et sera dans cet état encore moins propre à recevoir le lavis à l'encre qu'avant cette opération : ce qu'il y a donc de mieux à faire, c'est de s'arranger pendant qu'on dessine, de telle sorte, que l'on ne soit nullement obligé de laver le papier avant le lavis, d'autant plus qu'il existe des espèces de papiers qui par le moindre lavage à l'eau de leur surface, perdent immédiatement leur poli. Enfin, si l'encre de Chine ne résiste pas à l'eau, il est évident que l'on peut en aucune façon laver le dessin, aussi est-il nécessaire de bien s'assurer avant de passer l'éponge de la bonne qualité de cette encre.

§ 421. — Il n'est pas rare de voir des dessinateurs peu exercés encore, commettre des fautes en traçant des lignes soit avec le tire ligne, soit avec la plume. Si l'erreur n'est pas de conséquence, et de toute manière s'il ne s'agit que de petites lignes, on pourra corriger cette erreur en grattant légèrement les fausses lignes. On se sert à cet effet d'un bon canif-grattoir ou d'un canif ordinaire arondi par le bout, avec lequel on gratte les fausses lignes ou les petites taches, en maintenant le bord tranchant de cet instrument presque perpendiculairement à la surface du papier, et en faisant attention tout en enlevant ces lignes de ne pas couper dans le papier. Après quoi on frotte la surface grattée avec un petit morceau de toile, puis avec reprises un petit morceau de cire-vierge, en faisant attention de ne pas trop appuyer, pour qu'il ne reste pas de cette substance sur le papier. Par ce procédé si simple on parvient à détruire la faute commise, à tel point que l'on peut tracer des lignes avec l'encre sur le lieu effacé, qu'on

peut y écrire, y appliquer même des couleurs et laver sans qu'on y remarque la moindre des choses.

§ 422. — Mais si la faute commise dans le tracé ou dans le lavis d'un dessin était plus grave, ou s'il existait sur le papier un grand nombre de taches d'encre qui exigeraient que l'on grattât trop ce papier pour pouvoir les enlever (opération qui amineirait en effet le papier dans une trop grande étendueet qui, d'un autre côté, exigerait par trop de temps); on cherchera alors à les enlever avec l'éponge. Pour cela on fixe solidement un petit morceau d'éponge dans l'extrémité d'un tuyau de plume, ou entre les deux pointes d'un compas, ou bien encore entre les deux branches du tire-ligne; on l'imbibe d'eau bien propre, puis on lave avec précaution les endroits où se trouvent les fautes, seulement il ne faudra pas trop prolonger cette petite opération et ne pas appuyer trop fortement, parce que le papier pourrait devenir par trop rude.

Lorsqu'on aura fini d'éponger, on enlevera, à l'aide d'un pinceau suffisamment humide, la cernure qui reste après cette opération. Si on négligeait de faire cela, on pourrait toujours reconnaître le lieu où on a été obligé de laver, même après que le papier est devenu sec.

§ 423. — Après avoir lavé un dessin en entier ou dans certains endroits seulement, on évitera de le présenter à une chaleur trop élevée, comme à celle d'un fourneau, par exemple, mais on fera mieux d'attendre qu'il sèche insensiblement; on fera également attention de ne pas s'appuyer sur des endroits qui seraient encore humides. Une chaleur trop intense pourrait faire sauter le dessin ou voiler la planchette; d'un autre côté, on court le risque de produire des inégalités, des plis en appuyant le corps sur le papier encore humide, inconvénients qui subsistent même lorsque le dessin est entièrement sec. Pour les détruire, on sera obligé d'humecter de nouveau le papier et de le laisser tranquillement sécher.

§ 424. — Afin de pouvoir garantir le plus possible un dessin de toute saleté, poussière ou autres causes de malpropreté, pendant qu'on n'y travaille pas, on le recouvrira d'une grande feuille de papier ou mieux de carton; on évitera de le placer

dans un lieu humide, parce que la feuille de papier qui est tendue perdrait sa surface unie et deviendrait bosselée.

Tandis que l'on exécute le dessin, il sera également avantageux de laisser recouverts les lieux où l'on ne travaille pas, afin de les garantir de toute malpropreté; on ne devra donc jamais oublier de faire usage de feuilles de dessus et de dessous, et on devra surtout éviter de s'appuyer avec les manches de l'habit sur le papier.

On fera bien de choisir de préférence pour ce garde-main un papier vert, qui ménagera beaucoup la vue, en diminuant l'éclat de la couleur blanche du papier, c'est surtout pour le lavis qu'il est convenable de recouvrir le dessin entier et de ne laisser à découvert que le lieu dans lequel on opère; seulement il faut faire attention que ce papier vert ne se mouille pas de peur qu'il ne déteigne et produise des taches.

§ 425. — Il est en général de règle lorsqu'il s'agit d'exécuter un dessin linéaire, de laisser la planchette immobile devant soi et d'achever ainsi le dessin. Mais pour le lavis de ce même dessin, il devient quelquefois nécessaire de changer la position de la planchette, parce que par là on a un moyen de voir le dessin comme s'il était détaché de la planchette, et qu'il est aussi nécessaire de voir si dans ces différentes positions qu'on lui donne il apparait encore tel qu'il se trouvait sur la planchette. Si au lieu de cela on laisse la planchette dans une position immobile devant soi, recevant par conséquent toujours la lumière dans la même inclinaison, on trouvera, lorsque le dessin sera achevé et qu'on l'aura détaché de la planchette, qu'il n'apparaîtra comme bien que lorsqu'on lui rendra de nouveau la position qu'il avait durant le travail et avant qu'on l'eût détaché de la planchette; en effet, dans toute autre position, il perdra de sa beauté et sera modifié à son désavantage. La raison de cet effet, c'est que dans la position immobile de la planchette toutes les inégalités qui sont produites par les filaments du papier se trouvent recouvertes par le lavis, de telle sorte que les petites ombres projetées par ces inégalités se trouvent harmonisées, et que le dessin restant éclairé ainsi du même côté, les surfaces apparaîtront pures et belles, ce qui ne peut plus être le cas, lorsque la position du dessin à l'égard

des rayons lumineux est changée, parce que les petites ombres des filaments du papier, ainsi que les ombres qui résultent d'autres petites inégalités, se trouvent projettées dans une autre direction et n'ont pas été harmonisées par le lavis. Mais on évite en partie cet inconvénient lorsque déjà, dans le lavis, on aura changé de temps à autre la position de la planchette par rapport au degré d'inclinaison de la lumière, et alors le dessin, détaché de la planche et maintenu dans une position différente que celle qu'il avait sur celle-ci, se trouvera dans le plus grand nombre de cas dans une position qui concordera avec celle qu'il avait d'abord sur la planchette.

Ajoutons encore qu'en repassant sur les teintes, on est obligé aussi de donner, de temps à autre, durant le travail, une position différente à la planchette, lorsque, par suite de certaines places encore humides, on se trouve empêché de laver ces endroits.

§ 426. — En terminant ce chapitre, nous mentionnerons encore ce qui suit :

Dans un dessin géométrique, on n'admet jamais qu'un seul foyer de lumière, c'est-à-dire le soleil qui éclaire le tableau et tous les objets qui y sont figurés par des rayons parallèles entre eux. Si, au contraire, on suppose que deux ou plusieurs lumières éclairent un objet dans différentes directions à la fois; cet objet apparaîtra à la vérité bien mieux éclairé, mais sera plus difficile à représenter à cause des demi-ombres et quarts d'ombres qui en résultent.

Ainsi, dans la fig. 100, si d'', d et d', représentent différentes lumières qui éclairent simultanément le corps a, b, e, de telle sorte que sa portion horizontale ab projette une ombre portée sur la portion perpendiculaire be, l'ombre sera la plus foncée de b à c', celle de c' à c sera moins sombre, et celle de c à c'' sera la plus claire de toute, parce que $c'c$ est encore éclairée par les rayons lumineux projetés de d', et cc'' par ceux de d', aussi bien que par ceux de d'. La surface qui se trouve dans la lumière, auprès de $c''e$, sera naturellement la plus éclairée puisqu'elle reçoit à la fois son jour des trois lumières situées en d'' d et d'. Dans cette figure, l'ombre entière se trouve en bc', la demi-ombre en c, c', et le quart d'ombre en cc''.

§ 427. — Lorsqu'un objet n'est éclairé que par une seule lumière, jamais une ombre ne peut devenir visible dans une autre ombre, car, ainsi qu'on l'a déjà fait remarquer, il est impossible qu'une ombre puisse être aperçue dans une ombre (§ 405). Si donc il se trouvait *b e* un corps *c' f* (*fig.* 100), et si on admet que la lumière n'arrive que dans la direction de *d e* (avec laquelle tous les autres rayons lumineux se trouvent être parallèles), alors le corps *c' f* projettera pour sa part une ombre portée *cc*, si *a b* et ne se trouvait pas au-devant. Mais comme le corps *a b* produit déjà l'ombre portée *bc*, alors l'ombre *c' c* ne se trouve être, en tant qu'elle est projeté par *c' f*, nullement visible au milieu de l'ombre projetée par *a b*. On commettrait donc une faute et on agirait contrairement à ce qui se voit dans la nature, si l'on voulait représenter l'ombre *c' f* qui tombe dans l'ombre *a b*, comme étant une partie distincte plus sombre et rigoureusement limitée.

Si l'on voulait suivre les règles indiquées au § 404, on pourra maintenir l'ombre *c'c* un peu plus sombre auprès de *c'* et la fondre vers les bords, mais non pas parce qu'elle se trouve projetée à la fois par deux corps, mais tout simplement à cause des raisons indiquées au § 405. Si, au contraire, les ombres ne sont pas fondues vers les bords sur des plans et des surfaces parallèles au tableau, et si on leur donne partout une teinte unique, comme le font souvent les dessinateurs, et comme on peut fort bien le faire sans commettre de faute, alors l'ombre portée *c'e* produite par *c' f* n'aura pas d'influence sur l'ombre totale *b c*, et cet endroit ne devra pas, par conséquent, recevoir une teinte trop foncée.

§ 428. — Lorsqu'un corps K se trouve être éclairé suivant trois directions, figurées par *l*, *l'* et *l''* (*fig.* 136), alors les ombres portées qui en résulteront se recouvriront en partie et produiront par là l'ombre centrale *x*, la demi-teinte *y*, *y* et le quart de teinte *z*, *z'* et *z''*.

S'il existait encore un plus grand nombre de lumières qui éclairent à la fois le corps, il en résulterait aussi une multiplication des différentes ombres pour la détermination desquelles on n'est pas tenu de suivre une progression pour leur donner les noms d'ombre huitième, seizième, etc. On donne de pré-

férence à toutes les ombres qui ne sont pas des ombres entières ou centrales comme x, le nom commun de demi-ton, par lequel on comprend toutes celles qui, étant projetées par une lumière quelconque, sont cependant éclairées par une ou plusieurs lumières.

On entend aussi quelquefois par ces mots demi-ombres les demi-teintes intermédiaires entre la lumière et l'ombre qui se montrent là où les rayons lumineux tombent sous des angles plus aigus que sur d'autres surfaces, comme, par exemple, dans le cas du cylindre pour la partie de la surface courbe comprise entre la limite de l'ombre et celle de la lumière la plus vive. Cette dénomination ne peut cependant pas être envisagée comme complètement convenable; car, d'après les définitions données, une ombre est toujours l'absence totale de la lumière. Mais les surfaces qui sont frappées par des rayons lumineux sous des angles plus aigus que d'autres surfaces, reçoivent un jour plus mat, mais ne se trouvent nullement placées dans l'ombre, quel que soit du reste l'angle d'incidence des rayons lumineux.

On ne peut non plus appliquer le nom de demi-ombre à ces portions d'ombres qui sont éclairées par la lumière de réflexion, parce que par là cet objet ne se trouve pas désigné d'une manière aussi parfaite, que si on emploie l'expression de reflet qui détermine aussitôt l'espèce d'ombre dont il est question.

§ 429. — On a construit un instrument basé sur les faits indiqués au commencement du paragraphe précédent, à l'aide duquel on peut mesurer l'intensité de la lumière dans des circonstances données, et qui a reçu à cet effet le nom de *Photomètre*. En effet, on peut, à l'aide de cet instrument, déterminer par l'*obscurité* de l'ombre d'un corps, quelle est *la force* de la lumière qui éclaire, puisque l'on peut admettre que celle des deux lumières qui projette les ombres les plus fortes est aussi celle qui est la plus intense. Car si l'on admet dans la fig. 136, que deux lumières l et l', qui se trouvent à égale distance de K; si, par exemple, la lumière placée en l est plus intense que celle placée en l', alors l'ombre z' projetée par l' sera plus éclairée que ne pourra l'être l'ombre z projetée

par l, par la lumière l', qui est plus faible que l. D'après cela aussi, l'ombre z, projetée par la lumière la plus intense, paraitra plus sombre que l'ombre z' projetée par la lumière plus faible l'. Si le deux lumières sont également lumineuses en l et l', mais pas également distantes de K, alors, par les mêmes motifs, la lumière située le plus près produira l'ombre la plus foncée, et celle-ci le deviendra toujours davantage, plus la lumière se rapprochera de l'objet B, de même que l'autre ombre deviendra toujours plus claire lorsque cette lumière s'éloignera davantage de cet objet.

§ 430. — Dans le § 238 et suivants, on a dit tout ce qu'il était nécessaire de connaitre sur le tracé des lignes dites *traits de force* d'un dessin linéaire et des dessins qui ont été passés à la couleur. Nous ferons seulement remarquer ici que l'on ne devra pas surcharger un dessin de ces traits de force, parce que le but que l'on se propose en partie en les exécutant, a déjà été atteint complètement à l'aide du lavis. Si toutefois on se trouvait dans la nécessité, de les ajouter à un dessin lavé, pour raviver les contours et les déterminer avec plus de netteté, où pour recouvrir en quelque sorte les endroits sur lesquels on a passé en appliquant les couleurs; on ne devra cependant jamais faire de ces traits de force sur les lignes, le long desquelles on a fondu les teintes de surfaces planes ou courbes. Ainsi, par exemple, dans la fig. 122, les lignes AD, QK, RS et IS ne devront jamais être marquées par des traits de force.

Mais le tracé des traits de force, dans des dessins lavés, ne doit se faire que lorsqu'on a entièrement terminé le lavis, parce que l'on n'est pas sûr que ces traits ne se fondront pas dans la teinte, lorsque l'on passe dessus en lavant.

§ 431. — Dans un dessin linéaire on donne plus de force aux lignes qui se trouvent situées à droite et au bas du corps, lorsque la lumière arrive dans la direction de gauche à droite; de même dans un dessin lavé, on laisse subsister quelquefois près des lignes du contour, à gauche et et en haut, un *trait lumineux* que l'on nomme communément *reflet* et qui s'obtient en restant un peu en deça avec la teinte, et en laissant à peu près la largeur d'un

des traits de force qui existe le long des contours d'en haut et de gauche; ce reflet du reste occupe les côtés opposés aux traits de force : par conséquent on ne sera pas embarassé de savoir où il faut l'appliquer quand on sait où se mettent ceux-ci dans un dessin. Ces reflets n'ont lieu dans la nature que dans certaines circonstances, par exemple, pour des corps dont les arêtes ne sont pas tout à fait vives, mais tant soit peu arrondies, et comme il est difficile de les rendre (vu qu'il faut avoir une main très-sûre pour conduire le pinceau en ligne droite à égale distance du contour), on ne s'en sert pas toujours pour tous les dessins, excepté pour ceux d'architecture où ils sont souvent employés. Mais si dans le but d'embellir ou pour tout autre motif, on voulait, en appliquant la couleur sur une surface, produire ce reflet, on ne devra pas prendre le pinceau trop plein, parce que les cernures qui résultent d'une teinte trop liquide, produiraient ici en particulier un mauvais effet, quand même la teinte aurait été bien passée. Si l'on voulait, par exemple, passer des teintes sur les surfaces ***m, n, o, p*** et *a, b, c, d* (*fig.* 104), on laisserait subsister les reflets lumineux le long de ***mp, mn, ad*** et *dc* comme on peut le voir dons la fig. 152.

§ 432. — Lorsque la lumière qui éclaire les objets est telle que les rayons lumineux ne peuvent être supposés parallèles entre eux, mais ont une direction divergente, comme par exemple c'est le cas pour la lumière d'une bougie, alors la construction que l'on doit employer pour trouver la limite exacte de l'ombre et de la lumière, n'est pas très-différente de celle à employer dans l'hypothèse de rayons lumineux parallèles et on suivra les lois et règles générales d'après lesquelles on a produit la distribution de la lumière de l'ombre dans le cas d'une direction parallèle des rayons lumineux.

Mais la distribution de la lumière et des ombres sera plus difficile à figurer lorsqu'on admet qu'un objet est éclairé par divers corps lumineux à la fois, par exemple lorqu'un objet est éclairé par la lumière de la lune et en même temps par celle d'une lampe ou d'un flambeau. Dans un pareil cas, non seulement la construction à employer pour la détermination de l'ombre et de l'ombre-portée, mais de plus la répar-

titon exacte des reflets qui résultent de ces différentes lumières, comme aussi la reproduction la plus naturelle des couleurs et des tons, qui sont produits en même temps par la lueur de la lune et celle du flambeau, sont chose difficile en principe, exigent une grande connaissance des choses et une étude approfondie des effets de la lumière dans la nature.

De même aussi, il est plus difficile de rendre dans un dessin avec exactitude les effets de lumière et d'ombre qui sont déterminées par un jour ordinaire ou par un ciel nuageux (par exemple, dans une chambre lorsque la lumière arrive par plusieurs fenêtres et éclaire les murs, le plafond et le plancher, ainsi que les objets qui se trouvent placés dans cette chambre), que ceux produits par la lumière du soleil. Car dans l'exemple ici indiqué, les rayons lumineux ne peuvent pas être supposés parallèles entre eux, comme c'est le cas, lorsque ces objets sont éclairés par la lumière du soleil ; mais il faut les considérer comme des lignes divergentes. — La construction des ombres et des ombres-portées est basée sur les mêmes principes que l'on a enseignés lorsqu'il a s'agi de la direction parallèle des rayons de lumière et pourra en général s'exécuter aussi d'après les règles et les lois déjà enseignées, en faisant naturellement attention qu'ici les rayons lumineux sont divergents ; toutefois, la détermination des différents tons dans les ombres entières ou demi-ombres, dans les reflets et dans les lumières, offre bien plus de difficultés lorsque le dessin doit représenter, le plus fidèlement possible, les effets de la nature même.

§ 433. — Mais comme dans un dessin géométrique, ces deux cas de lumière divergente et de lumière diffuse ne sont pas admis, mais que les rayons lumineux au contraire sont supposés le plus souvent comme arrivants directement du soleil et parallèlement entre eux, il n'a été nécessaire ici que de faire connaître la construction des ombres qui se forment dans ce cas sur les surfaces des différents corps. Quant à la construction des ombres formées dans des conditions d'une lumière différente, elle est du ressort *de la perspective* et en général *de la peinture*, où l'on admet souvent de semblables hypothèses et qui, bien exécutés, produisent souvent un bel

effet. Il est donc nécessaire, que l'artiste qui les exécute possède le talent et les connaissances mathématiques et physiques nécessaires, et s'adonne à une étude suivie des effets de lumière dans la nature. Car autant un dessin de perspective produit un effet attrayant quand on a su ménager la lumière dans des proportions exactes et naturelles, autant l'effet est désavantageux lorsque cet accord n'existe pas.

§ 434. — Il résulte en définitif de tout ce que nous venons de dire, que la distribution des ombres sur *dessin géométrique* est de beaucoup plus simple et d'une exécution bien plus facile, que celle d'un *dessin perspective*; que même l'étude de cette distribution des ombres sur un dessin perspective peut en quelque sorte être envisagé comme étant une continuation de ce qui a été enseigné jusqu'ici; d'où il s'en suit, qu'il sera utile d'étudier auparavant la distribution des ombres sur un dessin géométrique et d'être bien familier avec les constructions à faire pour la détermination des ombres et des ombres portées, avant de passer à l'étude de la distribution des ombres sur un dessin perspective.

Si l'on est familiarisé avec les principes de la *projection orthographique*, si l'on connaît les lois du tracé des ombres dans le cas où les rayons lumineux arrivent parallèlement, si l'on sait déterminer avec exactitude la forme des ombres à l'aide d'une construction géométrique, et si l'on possède enfin la pratique nécessaire pour le maniement des instruments et des substances employées dans l'exécution d'un dessin, on se trouvera alors à même d'exécuter avec précision et élégance un dessin géométrique. Il est vrai de dire que le talent ou une disposition naturelle vaincront facilement les difficultés qui se présentent dans l'étude et mèneront plus promptement au but désiré, c'est-à-dire à la perfection; toutefois, il ne faut pas se le dissimuler, et ce que, du reste, l'expérience prouve chaque jour, c'est que par le zèle et une persévérance soutenu on peut, avec des dispositions ordinaires, atteindre une grande habileté pour une belle exécution d'un dessin géométrique soit linéaire, soit lavé.

CHAPITRE V.

—

Suite de la construction des ombres.

§ 435. — *Problème.* — Un demi-cylindre EFGH (*fig.* 137, 1) surmonté par un plateau quarré ABCD, dont la saillie A'H = $x'y'$, se trouve placé contre une surface *mnop* qui est perpendiculaire au plan de projection horizontale; trouver l'ombre portée que projette le cylindre sur cette surface, celle que le plateau projette sur le cylindre et sur cette surface même; et lorsqu'il existe en même temps sur cette dernière un parallélipipède IKPQ, et lorsque enfin les rayons lumineux arrivent dans la direction de la diagonale d'un cube.

Solution. — Dans cette hypothèse de la direction de la lumière, les projections *l* et *l'* forment des angles de 45 degrés avec la ligne de terre *op* (§ 319).

Dans la recherche de cette ombre portée, il ne peut être question ici que de celle qui est projetée par le plateau sur la surface du cylindre; car nous avons enseigné précédemment dans le § 330 et suivants, comment on trouve l'ombre portée B*b ss'c°*D que le plateau projette sur le fond du tableau et sur le corps IKPQ, ainsi que les ombres K*kpq*Q et *uv* qui sont projetées sur le fond tant par ce corps que par le cylindre. Quant à l'ombre portée en question et dont la limite est marquée par la *droite da* et par la courbe *art*, on devra la chercher comme cela se voit par cette figure, en suivant les règles précédemment données. La portion A'T' de la ligne A'B', ou DT de la ligne DC engendrent la limite *art*, et de même qu'ici on a admis arbitrairement entre A' et T' le point R' qu'on a projeté en R; qu'on a ensuité mené parallèlement

à l' la ligne $R' r'$, qu'on a élevé sur $o\,p$ en r' la perpendiculaire $r r'$ où elle coupe la circonférence du demi-cercle, qu'on a mené la ligne $R r$ parallèlement à l, et que par là on a trouvé le point r comme étant l'ombre du point R; de même, pour déterminer plus rigoureusement encore la limite d'ombre, on pourra admettre d'autres points entre A' et T' ou D et T, et marquer leurs points d'ombre à la surface cylindrique entre a et t. On a fait voir dans les § 337, 2 et § 352 que la limite d'ombre $a\,d$ produite par $A'\,d'$, est une portion d'ellipse, et qu'elle doit apparaître ici comme ligne droite.

Nous ferons encore remarquer que $t\,w$ est la limite de l'ombre à la surface du cylindre, elle se réunit en t avec celle de l'ombre portée. Mais il est impossible de prolonger d'avantage l'ombre portée du plateau, puisque les points que l'on admettrait entre T' et B' ou entre T et C ne pourraient plus produire des points d'ombre à la surface du cylindre, vu que le plan lumineux élevé perpendiculairement sur $T'\,r$ est tangent à la surface cylindrique le long de $w\,t$, et engendre sur la surface $m\,n\,o\,p$ la limite $v\,u$ de l'ombre portée (§ 405).

Il est facile de démontrer que l'ombre portée, projetée par l'arète B C du plateau sur la surface $m\,n\,o\,p$ et sur le parallélipipède I K P Q qui lui est parallèle, parait brisée, de telle sorte que $b s + s' c = B B = b' c$, tandis que la limite de l'ombre $B b$, au contraire, se montre sur ces deux surfaces sous la forme d'une ligne droite. Si, en effet, on se représente un plan lumineux élevé perpendiculairement sur $B'\,\beta'$, alors il coupera la surface $m\,n\,o\,p$ le long de $\beta'\,b'$, au contraire, la surface I K P Q le long de βb, et comme β est plus éloigné de $n\,o$ que β', alors $b s$ et $s' c$ ne peuvent aussi se trouver dans une même ligne droite, mais se trouveront au contraire éloignés l'une de l'autre proportionnellement à l'éloignement de ces deux surfaces. La ligne $B' b$ est sur le plan vertical la projection du rayon lumineux passant par B, et comme cette ligne est en même temps la projection de tous les rayons lumineux qui longent B' B" le long de l'arète supérieure du plateau, tandis que cette ligne se trouve en même temps représenté par le point B; alors tous les points que l'on adopte sur B' B" projetteront leur ombre sur la ligne $B\,b'$, et par suite l'ombre de la ligne B' B", sur le plan vertical,

apparaitra sur les deux surfaces *m n o p* et I K P Q sous forme d'une ligne droite.

Nous devons enfin encore faire remarquer que la limite de l'ombre D*d* sur le plan vertical est produit par la portion A'*d'* de la ligne A' A", et que D *d* se trouve avec *d a* sur une même ligne droite, d'après les motifs que nous venons d'indiquer.

§ 436. — Lorsque les rayons lumineux arrivent dans la direction de la diagonale d'un cube comme dans la fig. 137, I alors $\triangle DC\delta$ est $\propto \triangle A'B'z$. Si l'on prolonge ensuite les lignes *aa'* et *t t'* jusqu'à D C et A' B', il sera alors facile de démontrer, que $Da = A'a'$, $xy = x'y'$ et $Ct = B't'$, par la même raison $\delta a = za'$, $\delta y = zy'$ et $\delta t = zt'$. La courbe *a y t*, qui est projetée par la portion DT de l'arête inférieure du plateau sur la surface cylindrique comme limite d'ombre, se trouvera être par suite un quart de cercle égal au quart de cercle *a' y' t'*, et conséquemment on pourra abréger la solution comme suit : on fera $x\delta = D\zeta$, on mènera $D\delta$ et $C\delta$, on décrira avec $\delta a = za'$ le quart de cercle *a y t*, et on abaissera de *t* sur *o p* une perpendiculaire *t w*; alors *d a y t* sera la limite de l'ombre portée, *t w* celle de l'ombre propre. La limite d'ombre *a y t* forme à la vérité sur la surface cylindrique une ellipse, mais elle apparait dans la projection sous forme de quart de cercle (§ 138).

§ 437. — Si les angles $\zeta D\delta$ et $x'Az$ restent égaux entre eux, , mais s'ils ont plus ou moins que 45 degrés, alors la limite *a y* t ne formera pas de quart de cercle sur le plan de projection verticale, mais un arc qui sera égal à celui qui se trouve sur le plan de projection horizontale entre le rayon lumineux passant par A' et le point de tangence *t'* du dernier rayon lumineux.

Si les projections *l* et *l'* des rayons lumineux sont dirigées perpendiculairement sur *o p* (§ 354), de telle sorte cependant que le rayon lumineux L forme dans l'espace un angle de 45 degrés avec les deux plans de projection verticale et horizontale, alors la limite de l'ombre portée apparaitra dans le plan vertical sous forme d'un demi-cercle dont le rayon est égal à celui du cylindre (§ 138).

Si, au contraire, la direction du rayon lumineux *l'* est de

la sorte que le rayon lumineux mené par A' soit tangent à la circonférence du cercle, alors l'ombre portée sur le plan vertical ne sera produit que par l'arête A'A' (*fig.* 137), et la limite de celle-ci apparaîtra sous forme d'une ligne droite qui se trouvera dans la direction de D ?, bien entendu, que la projection des rayons lumineux sur le plan vertical a conservé la direction indiquée par *l*. Si la direction, au contraire est différente, alors la limite d'ombre formera aussi un autre angle avec DC et atteindra en tous cas la limite de l'ombre propre sur la surface cylindrique.

D'autre part, si le plateau carré n'a pas une saillie égale, et si les rayons lumineux forment sur le plan horizontal et sur le plan vertical différents angles avec la ligne de terre *op*, ou bien si la base du plateau est polygonale, régulière ou irrégulière; alors on emploira pour arriver le plus promptement au but, le procédé généralement utilisé et que nous avons indiqué dans le § 433; on admetra sur l'arête du plateau qui projette l'ombre autant de points qu'on le jugera nécessaire pour la détermination rigoureuse des limites d'ombre, et on cherchera leurs points d'ombre de la même manière que l'on a trouvé dans la fig. 137, le point d'ombre r de R

§ 438. — Enfin si le plan vertical *mnop* (*fig.* 137) avait une position inclinée vers le plan de projection verticale, et que les corps qui se trouvent appliqués contre lui, conservent, par rapport à lui, leur position; alors on projettera d'abord du plan horizontal sur le plan vertical, comme cela a eu lieu pour la fig. 120, et on construira ensuite les ombres en suivant la voie indiquée, après toutefois s'être préalablement assuré de la direction des rayons lumineux. Il est évident, qu'ici on doit surtout faire attention aux points essentiels, faire le transport de leur projection d'une figure dans l'autre, mener sur le plan horizontal les projections des plans lumineux, et couper les lignes dans lesquelles les plans lumineux touchent sur le plan de projection verticale la surface sur laquelle l'ombre doit être projetée, par des lignes que l'on mène des points correspondants et parallèlement à la projection du rayon lumineux.

§ 439. — Lorqu'on sera parvenu à trouver toutes les ombres,

on pourra d'après les indications des §§ 298 et suivants, facilement indiquer avec un crayon, à la surface du cylindre, le lieu de la lumière la plus vive, selon qu'on veut en tenir compte ou non, on appliquera sur les ombres une encre d'une teinte pas trop pâle (§ 401), après quoi on terminera le lavis à l'encre de Chine, en observant les règles indiquées dans les chapitres précédents, ainsi qu'on peut le voir, par exemple, dans la fig. 137, II.

Mais comme ces principes reçoivent ici, pour la première fois, une application pratique, il ne sera pas hors de propos d'entrer à ce sujet dans quelques détails.

On débutera par le cylindre, et on le lavera d'après § 402, sans tenir d'abord compte de l'ombre portée, mais on supposera la limite *w t* de l'ombre prolongée jusque vers CD. On appliquera le long de cette ligne entière, c'est-à-dire de *w* à la ligne D C de l'encre de chine d'une teinte claire, de telle sorte que cette ligne se trouve au milieu de la teinte que l'on vient de passer et que l on fond également des deux côtés à l'aide d'un pinceau humide. Quand tout est sec on renouvelle cette opération et on continue de la sorte jusqu'à ce que l'ombre du cylindre ait atteint le degré d'obscurité convenable. et que la portion de la surface qui se trouve dans la lumière passe doucement de l'ombre la plus obscure, dans la lumière la plus éclatante. On agit de même pour le lavis, des autres côtés lumineux de la surface cylindrique, le long de EH (§ 300), dans lequel cas on fait de nouveau abstraction de l'ombre portée, et on applique en même temps toute la teinte à la fois. Après quoi on applique l'ombre portée à la surface cylindrique, avec une encre rendue un peu plus foncée, de telle sorte que la partie la plus sombre se trouvera sur le lieu le plus éclairé du cylindre (§ 292 et 409. on fondra celle-ci des deux côtés jusqu'à ce qu'elle se confonde insensiblement avec la teinte de l'ombre propre, et on continuera ce travail jusqu'à ce que la surface cylindrique entière ait obtenu tant dans la partie lumineuse que dans l'ombre propre et l'ombre portée, l harmonie et la rondeur convenable. Les quelques taches qui pourraient être survenues durant le travail sont enlevées à la fin d'après les indications du § 35.

Pour l'application des teintes sur les surfaces A B C D, I K P Q

et *mnop*, on suivra les règles indiquées aux § 277 et 406, afin de maintenir le ton de la première surface le plus clair, et celui de la derniere un peu plus foncé que celui du second. Il faut cependant que la teinte à donner à la surface A B C D reste toujours plus sombre que le jour le plus vif de la surface cylindrique, quoique cette dernière soit plus éloignée que la première. Les motifs de ceci sont puisés dans les § 270, 298 et 407.

Dans l'application des ombres portées, on devra tenir compte de ce qui a été dit dans les § 293 et 407. — D'après cela, l'ombre portée sera maintenue plus obscure sur I K P Q que sur *mnop*, et celle-ci devra de nouveau être maintenue plus foncée que l'ombre propre du cylindre le long de F G. La portion de l'ombre portée qu'on devra maintenir la plus obscure est celle qui se trouve placée à la surface cylindrique au-dessus du jour le plus vif. Cette ombre sera fondue des deux côtés, comme on l'a déjà fait remarquer, et l'angle de direction des rayons lumineux fera savoir si l'on doit maintenir cette ombre près de E*d* plus obcure ou plus lumineuse que le triangle D E *d*.

§ 440. — Si la surface *mnop* (*fig.* 137) a, par rapport à la projection du plan vertical, la position indiquée au § 438, alors les surfaces A B C D, I K P Q, *mnop*, de même que les faces latérales, qui sont visibles dans ce cas, ne recevront pas une et même teinte, mais elles seront lavées d'après les indications du § 280. Les ombres propres et les ombres portées sont traitées de la même manière, et on appliquera ici ce qui a été dit à ce sujet aux § 293, 400 et autres endroits du chapitre précédent.

§ 441.— *Problème.* — Un demi-cylindre E F G H est recouvert par un plateau de forme cylindrique A B C D (*fig.* 138, I); on doit construire l'ombre portée, qui est projetée par ce plateau sur la surface cylindrique et sur le fond *mnop*, contre lequel ils se trouvent tous deux, et en admettant que les rayons lumineux arrivent dans la direction de la diagonale d'un cube.

Solution. — Pour trouver la limite de l'ombre portée qui est projetée par l'arrête D C ou A' I' B du plateau sur la surface cylindrique, on commencera par déterminer le point de cette arrête qui projette son ombre sur le côté E H du cylindre, et

par lequel le commencement de l'ombre portée se trouve marqué sur la moitié du cylindre faisant face à l'observateur. A cet effet, on mènera H T' parallèlement à *l'*, et on projettera T' en T sur D C; T' ainsi que T sera alors ce point, et si l'on mène T*t* parallèlement avec *l*, *t* sera alors le point d'ombre cherché de T. Si, d'autre part, on mène la tangente I' C' parallèlement à *l'*, tangente qui touche le petit cercle en *w'*, si l'on projette I' en I sur D C, et si on mène I *x* parallèlement à *l*; alors *x* sera le point d'ombre de I, et *w x* la limite de l'ombre propre, par suite T I sera sur D C et T' I' dans le demi cercle A' E' Q' la portion de l'arrête en question qui produit l'ombre sur la surface cylindrique. Car tous les points, que l'on admet entre T' et A', projettent leur ombre sur la surface *m n o p*, ou les projetteraient en partie sur la moitié postérieure H Y G de la surface cylindrique, si le plan *m n o p* ne se trouvait pas là. Au contraire, les points admis entre I', Q' et B' ne peuvent projeter leur ombre que sur le plan *m n o p*. Pour tracer après cela la courbe d'ombre entre *t* et *x*, on choisira entre T' et I' des points à volonté, par exemple E', U', on les projettera vers D C en E et U et on obtiendra alors les points d'ombres *e* et *u*, parce que l'on coupe par des lignes parallèles à *l*, à partir de E et U les perpendiculaires dans lesquelles la surface cylindrique a été coupée par les plans lumineux élevés sur E' *e* et U' *u'*.

Les portions D T ou A' T, de même que I C ou I' B' de l'arrête, projetteront, comme nous l'avons dit plus haut, leur ombre portée sur le plan *m n o p*. On suivra la voie indiquée au § 344 pour leur détermination, en élevant des perpendiculaires dans les points où les rayons lumineux, menés parallèlement à *l'* par *z'*, T', E', U', I' et Q', coupent la ligne *o p* et en coupant celle-ci par des lignes parallèles à *l*, à partir des points correspondants des arrêtes D C et A B. Par là on trouvera très vite la demi-ellipse C *r i u' e' t*$_z$ D comme étant l'ombre de l'arrête inférieure, et la demi-ellipse B *q i' e'* A comme étant l'ombre de l'arrête supérieure, lesquelles devront être réunis par la ligne droite *q r* comme étant l'ombre de QR. Il est évident que l'on trouvera cette limite d'ombre ainsi que la courbe *t e u x* d'autant plus rigoureusement que l'on adoptera

pour les représenter un plus grand nombre de points sur les lignes qui leur répondent.

§ 442. — Si l'on doit laver la figure à l'encre de Chine, on déterminera alors, d'après les indications du § 298 sur le plateau et sur le cylindre, le lieu du jour le plus vif, et on suivra en général le procédé d'opération indiqué au § 439 ; on maintiendra toutefois la lumière plus vive sur le plateau que sur le cylindre, *et vice versa*, l'ombre propre plus sombre sur le plateau que sur la surface cylindrique, ainsi qu'on le voit dans la fig. 138, II.

§ 443. *Problème.* — Trouver l'ombre portée, que projette la moitié du plateau ABCD qui est un octogone régulier, sur un demi-prisme hexaédrique IKRQ, *fig.* 139. I, et sur la surface de fond *m n o p*, lorsque tous deux se trouvent placés immédiatement contre cette surface et lorsque *l* et *l'* indiquent la projection des rayons lumineux sur le plan vertical et sur le plan horizontal.

Solution. — Toutes les lignes limites des ombres qui se produisent ici seront des lignes droites, parce qu'elles ne sont engendrées sur des surfaces planes que par des lignes droites. Si de Q, *s'* et *t'* l'on mène les projections des plans lumineux parallèlement à *l'*, projections qui donnent naissance aux points *a'*, S' et T', alors *a'* T' sera cette partie de l'arrête inférieure du plateau, qui détermine la limite d'ombre *x a s e t* sur le prisme, limite qui pourra être obtenue ainsi que cela se voit par la figure en suivant la voie connue. D'après cela *x* sera le point d'ombre de *x'*, *a* celui de A, *s* celui de S, *e* celui de E et *t* celui de T. De même le polygone B *b f e' a'* A sera sur la surface du fond l'ombre entière de l'arrête inférieure du plateau et C *c h g d* D l'ombre de l'arrête supérieure de ce plateau, *h f* sera l'ombre de l'arrête HF dudit plateau et A *a* (ligne qui se trouve avec A *a* dans une même ligne droite), celle de *x'* A'. Les lignes *e' f* et *g h* sont égales et parallèles à EF, de même que *e' u* et *t e* sont égales et parallèles à ET. Le plan lumineux élevé perpendiculairement sur T' *u'* touchera l'arrête FF' du prisme, et indiquera par la projection T *u* du rayon lumineux sur le plan vertical les points *t* et *u*, de même que la limite de l'ombre portée *n n'* qui engendre sur *m n o p* la portion *t* U.

§ 444. Les règles que l'on a suivies pour le lavis de la figure 139, II, ont été détaillés dans les § 270, 277, 280, 293, 295, et dans le chapitre précédent. Nous devons seulement faire remarquer ici que la face latérale du prisme située au-dessus de Q *s'* doit-être maintenue plus claire d'après le § 407 que celle qui est située au-dessus de *s' t'*.

§ 445. *Problème.* — On doit trouver l'ombre portée que projette sur une surface *mnop* un prisme EG à quatre faces, situé contre cette surface et recouvert d'un plateau A C de forme demi-circulaire, lorsque sur cette même surface se trouve placé un demi-cylindre horizontal Q I, de telle sorte, que celui-ci se trouve encore atteint par l'ombre portée du plateau et du prisme, et lorsque les projections des rayons lumineux arrivent suivant la directiou arbitraire *l* et *l'* fig. 140, I.

Solution. — On cherchera d'abord l'ombre portée que le plateau projettera sur la surface *mnop*, en second lieu, celle qu'il projettera sur le prisme, en troisième lieu, celle que le prisme projettera sur la surface *mnop*, en quatrième lieu, l'ombre que le demi-cylindre horizontal projettera sur le fond *mnop*, en cinquième lieu, celle que le plateau projettera sur ce demi-cylindre, et en sixième lieu, l'ombre que projettera le prisme sur ce cylindre. Par là, non seulement on suivra avec facilité les constructions nécessaires pour l'exécution de la figure entière, mais on a encore l'avantage d'avoir un problème dans la solution duquel on a à résourdre six différents cas.

1°. On trouvera la limite de l'ombre portée, projetée par le plateau sur la surface *mnop*, d'après les indications du § 441.

2°. Le prisme quadrangulaire se trouve immédiatement contre la surface de fond *mnop*. La limite de l'ombre du plateau ne pourra donc conserver partout la forme que l'on vient de trouver, mais elle changera pour prendre celle de *res* là où cette ombre portée tombe sur la surface antérieure du prisme. Cette courbe est de nouveau la portion d'une ellipse qui est représentée à l'aide des points R', E', et S' ainsi que par R, E et S.

3°. La limite de l'ombre portée, que le prisme projette sur la surface *mnop*, apparaîtra sous forme de la ligne droite *ff'*,

mais qui ne sera visible ici que jusqu'à *k*, c'est-à-dire jusqu'à la limite de l'ombre portée que le cylindre QI projette sur la surface *mnop*.

4°. Mais pour trouver l'ombre portée, qui est projetée par le demi-cylindre horizontal QI sur la surface *mnop*, on tracera la projection *qtuh* de ce cylindre sur le plan horizontal et on agira ensuite comme on l'a fait pour les fig. 113 et 119.

5°. – Pour trouver la limite de l'ombre-portée, que le plateau projette sur la surface courbe du cylindre QI, il faut, comme cela a eu lieu dans le § 352, rechercher les ellipses, dans lesquelles les plans lumineux, élevés perpendiculairement sur les projections des rayons lumineux dans le plan horizontal, coupent la surface du cylindre; on aura donc à déterminer sur ces ellipses les points où les rayons lumineux, qui longent les points projetés sur l'arrête inférieure du plateau, viennent frapper la surface du cylindre QI étendu horizontalement. Ainsi, par exemple, pour trouver le lieu dans lequel le point F de la ligne DC jettera son ombre sur la surface cylindrique, on construira la demi-ellipse 1, 2, 3, 2, 1, et on coupera celle-ci par la ligne F *f'* en *w*; alors, *w* sera l'ombre du point F, et la ligne mixte *hir*, celle de la ligne droite FF, puisque le point d'ombre *f'* qui primitivement tombait sur le plan *m n o p*, viendra maintenant à se trouver à la surface du cylindre en *w*. Mais la ligne 1*w* est une portion de la ligne courbe 12321 déjà trouvée, parce que tous les points que l'on voudrait admettre sur la ligne E F au-dessous de *v*, jetteraient leur ombre en 1*w*, tandis que F' est la projection de la ligne entière FF. Ainsi donc *h*1 sera l'ombre de F *v* et 1*w* celle de *v* F. De même on trouvera *x* comme étant le point d'ombre X, *y* comme celui de Y et *a* comme celui de S, et si on réunit ces points par une courbe, alors 1*wxy*α sera la limite de l'ombre portée projetée par le plateau sur le cylindre.

6°. — Enfin la ligne limite de l'ombre portée projetée par le prisme sur la surface cylindrique, est formée d'après le § 352, par la ligne courbe *a* εγ qu'on a déjà été obligé de tracer pour la détermination du point α. Mais cette ellipse est en même temps la ligne dans laquelle le plan lumineux qui longe FG, coupe la surface du cylindre, et pour cela l'ombre ne vient

que jusque γ, parce que l'ombre propre du cylindre commence précisément en ce point.

§ 445. — Si l'on songe que DC, FF et FB (*fig.* 140, I) sont les portions du plateau qui forment les lignes de limite de l'ombre portée tant sur la surface *mnop* que sur la surface courbe QI; alors l'exactitude du procédé employé ici ressortira d'elle même d'après ce qui a été dit jusqu'à présent à ce sujet. Nous croyons cependant devoir rappeler ici les règles du procédé employé pour trouver un point quelconque de la limite d'ombre, de *w*, par exemple. Si on se représente donc un plan lumineux élevé perpendiculairement au-dessus de F' 321, celui-ci touchera la surface *mnop* le long de, 11*f' h* et en outre coupera la surface du demi-cylindre QI en une demi-ellipse, dont la projection sur le tableau est la courbe 12321 déjà trouvé. Comme maintenant le rayon lumineux qui glisse en F le long du rebord du plateau se trouve dans le plan qui lui-même doit passer par le point inférieur F du plateau; alors ce point projetera son ombre là où la projection F *f'* de ce rayon lumineux sur le plan vertical, atteint la ligne d'intersection 12321 du plan lumineux avec la surface du cylindre. Or, comme ceci a lieu en *w*, alors *w* sera l'ombre du point F. Il démontre de même que *x* est l'ombre de X, *y* celle de Y et *x* celle de S.

§ 446. — Il n'est pas besoin d'entrer dans des explications plus détaillées pour faire comprendre que la construction resterait la même si la surface *mnop* et le corps qui se trouve contre avait une position inclinée, ou bien si QI, au lieu d'être un demi cylindre, était, par exemple, un demi-prisme ou un cylindre entier, ou un corps d'une forme toute différente. En tout les cas, il s'agira toujours de rechercher les lignes d'intersections des plans lumineux avec un de ces corps, et de déterminer sur celui-ci l'ombre des points correspondants.

§ 447.—Le lavis de cette réunion de corps se fait d'après les lois connues, comme on peut s'en convaincre par l'examen de la fig. 140 II.

§ 448. — *Problème.* — Un cône droit tronqué GHKI (fig. 141) est recouvert par un plateau de forme carrée, de telle sorte que l'axe du cône passe par le milieu du plateau; on doit trouver l'ombre portée que ce plateau projette sur la sur-

face du cône, lorsque les projections des rayons lumineux arrivent dans la directiou marquée par l et l'.

Solution. — Malgré que ce problème ait une grande analogie avec celui du § 135, il s'en distingue cependant en ce qu'ici la forme du cône exige un antre procédé d'opérations différent de celui employé dans le cas du cylindre. En effet, si dans le cas du cylindre les plans lumineux que l'on élève perpendiculairement sur les projections des rayons lumineux du plan horizontal, coupent la surface cylindrique en lignes droites, ici au contraire la surface conique sera coupée par un plan lumineux en lignes courbes, qui seront même des hyperboles (§ 141); à l'exception du plan lumineux qui est posé sur le rayon lumineux po passant par le centre o, et qui engendre une ligne d'intersection droite qr, dont $q'r'$ est la projection sur le plan horizontal (§ 111).

Afin donc de pouvoir déterminer la limite d'ombre que l'arrète AB du plateau produit sur la surface conique, il s'agira de nouveau de trouver les ombres de certains points. A cet effet on mènera sur le plan horizontal une tangente C'n' au demi cercle G'D'H' (qui est la projection de la base supérieure du tronc du cône), cette tangente devra même être parallèle à l', on partagera le côté GI du cône en un nombre égal de portions, soit par exemple en 3, on mènera 13 et 2,4 parallèlement à la ligne de terre xy, et on décrira avec $o1$ et $o2$ sur le plan horizontal les demi-cercles correspondant à ces lignes. Si après cela on projette les points m', α', β, D', γ' et n' sur le plan vertical dans les lignes correspondantes, et si l'on mène par ces points correspondants m', a', β, D'γ et n obtenus sur le cône, une courbe m D n, elle sera, d'après le § 140, l'hyperbole cherchée, dans laquelle le plan lumineux, posé sur C'n', coupera la surface conique. Si d'autre part on projette le point C' sur AB en C, et que l'on mène de C une ligne parallèle à l, alors le point C, dans lequel cette ligne coupe l'hyperbole, sera le point d'ombre cherché de C. On trouvera par le même procédé les ombres a et f, des points A et F et de tous autres, que l'on admettrait pour une détermination plus rigoureuse des limites d'ombre sur A'B' ou AB. La ligne d'intersection Fv, sur laquelle se trouve a comme étant le point d'ombre de A, et

dont la ligne $f'v'$ est la projection sur le plan horizontal, est de même la portion d'une hyperbole, quoique ici elle se distingue d'une manière très-peu sensible d'une ligne droite. La portion aa' de la limite d'ombre apparait de nouveau ici comme étant une ligne droite (§ 339, 2 et § 352), quoi qu'elle soit en réalité une ligne courbe elliptique. La limite d'ombre en forme de ligne courbe acf est la projection d'une courbe elliptique, et comme telle la portion d'une ellipse ou même aussi celle d'un cercle ; car le plan sur lequel se trouvent tous les rayons lumineux qui longent AB forme une ellipse, puisqu'elle coupe la surface conique. La limite sombre acf est prolongée jusqu'à Z, c'est-à-dire jusqu'à la limite de l'ombre, laquelle ombre on trouve, d'après le § 348, en ce qu'on prolonge d'abord les côtés IG et KH du cône, jusqu'à ce qu'ils se coupent au sommet S. Après quoi on mène sy parallèlement à l, on élève sur xy ou y une perpendiculaire ys qui ira couper en s la prolongation de po, on mène de s une tangente st' au demi-cercle IE' K, on projette le point t' en t sur IK, et on mène St.

§ 449. — Si le cone est recouvert par un plateau cylindrique ou poligonal, le procédé à employer pour trouver l'ombre portée sera encore le même, quelque soit l'angle que forment les projections des rayons lumineux avec la ligne de terre, et quelque soit la saillie du plateau ; toutefois la détermination sur l'arrête inférieure du plateau des points par lesquels est formée la limite de l'ombre portée, occasionne quelque différence dans la construction, puisque leurs distances dans le plan horizontal les uns des autres ne concordent pas avec celles du plan vertical, comme c'était le cas dans la fig. 141 ; ces points se trouveront bien plus rapprochés sur le plan vertical que sur le plan horizontal, lorsque sur le plan vertical ils se trouvent compris dans une ligne courbe ou inclinée vers le tableau (fig. 138 et fig. 139).

§ 450. Si le cône se trouve posé sur sa base *la plus petite*, et, si, au contraire, le plateau recouvre la plus grande base du cône, on trouve alors l'ombre portée en suivant les indications indiquées au § 448; avec cette différence seulement qu'ici tiendra compte de la différence de position du cône, qui

entrainera aussi la différence de position de l'hyperbole. L'étendue et laforme du plateau, ainsi que les dimensions du cône, auront naturellement une influence très-marquée sur la forme de l'ombre, dans ce cas où la direction des rayons lumineux serait de nature à produire de nouvelles ombres portées.

§ 451. — Pour faire une distribution convenable des ombres et des lumières dans la fig. 141, à l'aide de l'encre de Chine, on suivra les règles précédemment données. Il faut encore remarquer ici, que, puisque près de la surface conique, les rayons lumineux arrivent sur le côté gauche de la figure sous des angles, qui se rapprochent plus des angles droits que cela ne peut être le cas près d'une surface cylindrique aux mêmes endroits, on devra aussi rendre plus vif le jour le plus brillant qui se montre ici, et aussi tenir en cet endroit l'ombre portée plus foncée. Du reste, il faut que la partie lumineuse du cône soit lavée de haut en bas, et au contraire l'ombre et l'ombre portée de bas en haut, de telle sorte que l'ombre portée que l'on voit ici apparaisse plus sombre sur la limite que sur le corps qui projette l'ombre.

§ 452. — De même que pour les cinq corps convexes et recouverts de plateaux que nous avons supposés ici, on a trouvé, à l'aide d'une construction géométrique, les ombres portées; de même on trouvera pour les autres cas admis ici les ombres, les limites des ombres portées et les ombres propres. Avec un peu de reflexion on trouvera les constructions qu'il faudra employer ainsi que les différentes teintes du lavis pour les différents cas, et pourront être déterminées d'après un ou plusieurs des problèmes déjà résolues, peu importe que la base du corps aussi bien que celle du plateau qui le recouvre soit un polygone régulier ou irrégulier, que ce plateau repose ou non par son milieu sur celui des corps situés verticalement, que le rayon lumineux frappe la surface du tableau de gauche à droite ou de droite à gauche, qu'il forme avec lui un angle aigu ou obtus, etc.

§ 453. — Si au contraire le corps a une position horizontale, et que le plateau qui projette l'ombre une position verti cale, telle que par la direction des rayons lumineux, il projette

une ombre portée sur le premier, alors leprocédé employé jusqu'ici pour trouver l'ombre portée, restera en général le même, et n'éprouvera de modification que dans le cas où l'on donnerait, à la ligne de terre xy une position non pas horizontale, mais verticale, de telle sorte qu'elle forme avec l'axe horizontal du corps un angle droit, et qu'ainsi les plans nécessaires pour la construction des ombres viennent à se trouver placés l'un à côté de l'autre.

§ 454. — *Problème.* — Un petit cylindre $rsun'$ vertical, est recouvert par un cylindre plus grand DEFG, placé horizontalement ; contre ce dernier se trouve encore placé un autre cylindre AB (fig. 142) également placé horizontalement, mais ayant un plus grand diamètre que le précédent ; construire l'ombre portée que projettera en premier lieu le cylindre AB sur DEFG, et en second lieu celle que le cylindre DEFG projettera sur $rsun'$, lorsque les rayons lumineux arrivent dans la direction de la diagonale d'un cube.

Solution. — Pour trouver la première ombre $\alpha\gamma$, on donnera à la ligne de terre xy une position verticale, et on déterminera sur le plan horizontal l'arc a' C', qui engendre sur la surface du cylindre DEFG la limite de l'ombre portée, puisque d'après le § 441 on mène de D' la ligne D' a' parallèlement à l', et au cercle D' β' E' une tangente B' c' aussi parallèle à l', tangente qui touche ce cercle au T'. Ensuite on déterminera d'après le § 441 les points d'ombre α et β, ainsi que les points nécessaires pour la détermination plus précise de la courbe d'ombre, comme par exemple, δ et β, et on mènera par eux la limite $\alpha\delta\beta\gamma$ de l'ombre portée cherchée.

Pour figurer la deuxième limite d'ombre $nopq$, le point T' déjà trouvé est nécessaire parce qu'il marque la limite T t de l'ombre sur le cylindre DEFG, et ce sera le long de cette ligne que glisseront les rayons lumineux qui limitent l'ombre sur le cylindre $srun'$, car tous les rayons lumineux au-dessus de C', tels que par exemple b', β', d', δ', éclairent la surface cylindrique horizontale, et n'exerceront aucune influence sur l'ombre que ce cylindre projettera sur le cylindre vertical 25 un'.

On tracera donc au-dessous de la ligne de terre xy le demi-

cercle $n'p'u$ du cylindre vertical, on fera $p'v'$=T' v' et on mènera par v' la ligne T' t' parallèlement à XY, ainsi T' t' se trouve être sur le plan horizontal la projection de T t, et avec cela le problème se trouve ramené à celui du § 435, puisqu'il ne s'agira plus que de trouver la portion de Tt ou T' t' qui produit la limite d'ombre. A cette fin on mènera de n' la ligne $n'h'$ parallèlement à l', et contre le demi-cercle $n'p'u$ une tangente $q'n'$ également parallèle à l'; alors $h'm'$ ou sa projection hm sur le plan vertical sera la portion à chercher de la ligne qui projette l'ombre. Si maintenant on admet entre h' et m' plusieurs points à volonté, par exemple, i', k', si on les projette dans T t en i et k, si on mène les lignes $i'o'$ et $k'p'$ parallèlement à l' et si on coupe les perpendiculaires élevées sur XY en o', p', et q' par des lignes menées parallèlement à l, de h, i, k et m en o, p, q, alors la courbe $nopq$ menée par eux sera la limite d'ombre cherchée.

§ 455. Comme dans la direction admise des rayons lumineux l'angle $< nhv = < nh'v$ il sera alors facile de montrer que les distances perpendiculaires des points $n'o'p'q'$ de T' t' sont égales, de sorte que $nopq$ doit être le même arc que $n'o'p'q'$; et comme $\Delta vkp \cong \Delta v'k'p'$, alors $vp=v'p'$. La construction abrégée suivante s'appliquera donc au cas présent. Après qu'on aura trouvé le point T" comme on l'a fait voir plus haut et qu'on aura mené Tt, on fera vp=T" $v"$, on prendra dans l'ouverture du compas le diamètre du cylindre vertical r s un' et avec lui on décrira de z comme centre l'arc npq jusqu'à la limite de l'ombre latérale, lequel arc doit avoir ici 135 degrés.

§ 456. Si les deux cylindres ont l'un par rapport à l'autre une grandeur ou une position autre que celle dessinée dans la fig. 142; si le cylindre vertical se trouve placé un peu plus en avant ou encore plus en arrière; ou bien si les rayons lumineux arrivent suivant des directions différentes; alors la construction à faire restera la même, seulement l'ombre portée produite devra naturellement prendre une forme analogue aux modifications des contours, et qui sera plus ou moins différente de celle-ci. Dans tous les cas, il s'agira toujours de tra-

cer sur la surface du cylindre qui projette l'ombre la ligne qui est la limite de l'ombre portée sur le cylindre qui est vertical, c'est-à-dire celle qui produit la limite de l'ombre propre sur le cylindre recouvrant. Il ne sera pas difficile, à celui qui réfléchira un peu, de trouver la construction abregée de ces différents problèmes.

§ 457. Les circonstances sont encore les mêmes, lorsqu'il s'agit de trouver l'ombre portée que projettera un cylindre sur une surface plane. Ici aussi la chose essentielle c'est la détermination de la ligne T *t*, *fig.* 142, I, parce que par elle est formée la limite de l'ombre portée qui sera dans ce cas une ligne droite (voyez K *i*, *fig.* 140, I).

Si *s t u n* au lieu d'être un cylindre était un prisme, on déterminera de nouveau la ligne T *t*, et l'on agira pour la recherche de l'ombre ainsi que cela a été enseigné dans le § 443 puisqu'ici on envisage la ligne T *t* de la même manière qu'on l'a fait pour la ligne AB, à l'aide de laquelle on a trouvé la limite de l'ombre portée a été trouvée. La saillie du corps qui recouvre l'autre ou l'éloignement de la ligne T*t* du prisme est de nouveau indiqué par *p' v*=T''t'.

§ 458. La fig. 142 II, fait voir comment ces trois surfaces cylindriques doivent être lavées d'après les instructions données à ce sujet et dans quel rapport doivent se trouver entre elles les limites des parties qui se trouvent dans la lumière ainsi que celles des trois faces et les deux ombres portées (voyez § 415).

§ 459. *Problème.* — Un corps convexe de forme régulière (coussinet), dont les deux bases sont des cercles de diamètres différents, est recouvert sur le plan horizontal par un plateau de forme carrée, et il se trouve lui-même sur un cylindre au-dessus duquel il fait saillie, de telle sorte que les axes du cylindre et ceux du corps convexe se trouvent sur une même ligne et passent par un point central du plateau qui recouvre, comme cela peut se voir dans la fig. 143. On doit trouver les ombres portées et les ombres propres, qui dans cette réunion de corps apparaîtront à leur surface, lorsque la direction des rayons lumineux est égale à celle de la diagonale d'un cube.

Solution. — L'on a à chercher pour ces corps les ombres suivantes.

1° L'ombre propre du coussinet lui-même;

2° L'ombre portée de ce même coussinet sur la surface cylindrique.

3° L'ombre portée du plateau à la surface courbe du coussinet;

4° L'ombre portée du plateau sur le cylindre.

Relativement à l'ombre propre qui existe sur la surface courbe du coussinet, on la trouvera en suivant les indications des § 390 et 379, il est en effet indifférent que la courbe qui détermine la forme de ce corps soit un arc de cercle ou une ligne ayant une courbure différente. On dessinera donc, comme cela a eu lieu dans la fig. 143, la ligne *a'c'* comme étant la projection d'un rayon lumineux pallèle à *l'* et par les points pris à volonté *d'*, *d'*, *d'*, etc. sur la ligne *a'b'*, des lignes papallèles à ce rayon de lumière. Après quoi, on cherchera les lignes d'intersections des plans lumineux sur le plan vertical, en projettant les points 1. 2. 3. 4. 5. 6.) (où par exemple la ligne *a' c'* coupe les cercles concentriques) sur la projection verticale dans les points 1. 2. 3. 4. 5. 6. et 4, points qui se trouvent sur les lignes droites correspondantes au cercle sur le plan vertical et en menant par tous ces points la courbe 1. 6. 4. On tracera par le même procédé un système de courbes dans la projection verticale; à chacune d'elles on mènera une tangente parallèle à *l*, et on reliera tous ces points de contact par une ligne courbe *fueg t*; et ainsi celle-ci se trouvera être la limite de l'ombre propre du corps en question.

Si en second lieu on prolonge ces tangentes jusqu'à ce qu'elles coupent sur la surface cylindrique les lignes verticales qui leur correspondent, et si l'on réunit là les points d'intersection par une courbe *hik*; celle-ci sera la limite de l'ombre portée que le coussinet projette sur la surface cylindrique, et *fuegt* sera la courbe déterminant la limite d'ombre portée *hik*.

Si en troisième lieu on détermine sur la ligne *ab* du plan vertical, les points *d'*, *d'*, *d'*, etc., relevés des points *d*, *d*, *d*, etc.

du plan horizontal et si l'on mène de ces points des parallèles à *l*, alors les points d'intersection de ces lignes avec les courbes trouvées d'abord détermineront sur le coussinet la limite *e*, *m*, *n*, *g* de l'ombre portée sur ce corps par l'arête inférieure du plateau qui recouvre.

Si enfin on décrit en quatrième lieu avec le demi-diamètre $oz = c'r$ un quart de cercle *opq*, celui-ci sera la limite de l'ombre que l'arête *ab* du plateau projette sur la surface cylindrique (§. 436).

Ces ombres, ainsi qu'on peut s'en assurer par l'inspection de la figure 143, se recouvriront en partie les unes les autres. Ainsi le contour de l'ombre portée sur la surface cylindrique sera *hsoik* dans lequel *oi* est l'ombre d une portion de l'arête inférieure *ab* du plateau et *ik* au contraire celle du coussinet sur le cylindre. Les lignes *so* aussi bien que *vu* seront des lignes droites comme cela a été indiqué dans la figure 119 et en d'autres endroits. La portion *hs* se trouve encore être l'ombre du coussinet, laquelle est produite par la ligne *fuegt* de celui-ci. Enfin la ligne *emug* est produite, comme il est facile de s'en convaincre, par une portion de l'arête inférieure du plateau.

§ 460. Dans cette figure on n'a fait qu'appliquer les ombres. Leur lavis complet a lieu d'après les lois connues et s'exécutera sans aucune difficulté.

§ 461. Les principes et les règles à l'aide desquels on a trouvé sur les corps convexes la forme de l'ombre portée peuvent aussi en général être employés pour la détermination des ombres portées qui se forment sur des surfaces *concaves* ou creuses de certains corps comme du reste on l'a fait voir dans les figures 125 à 130. Mais la forme de cette ombre portée dépend de la forme et de la position des lignes qui produisent ces limites, ainsi que de la forme de la surface creuse sur laquelle est projetée cette ombre portée et enfin de la direction des rayons lumineux. La construction à employer chaque fois est donc indiquée par ces trois causes, et elle doit être telle que l'on puisse par un moyen simple et prompt trouver la forme de l'ombre portée ainsi qu'elle se présente réellement dans la nature sous les mêmes conditions.

Remarque. Comme on peut se représenter dans beaucoup de cas l'espace creux d'un corps comme étant une *niche* qui a un développement plus ou moins grand, alors on devra employer dans la suite cette expression à cause de sa brièveté.

§ 162. *Problème.* — Trouver l'ombre portée qui se forme à la surface concave d'une *niche* demi-circulaire, recouverte par un quart de sphère adf, lorsque les rayons lumineux arrivent dans la direction de la diagonale d'un cube (*fig.* 144).

Solution. — Quand les points d'ombre tombent dans la portion cylindrique de la niche, ainsi que cela est le cas pour les points α, β et γ, *fig.* 1, on suivra alors la voie tracée précédemment. Pour cela on prend les points a, b, c, à volonté sur le demi-cercle adf qui produit la limite de l'ombre, on les projette horizontalement sur la ligne $a'f'$, on tire parallèlement à l' les droites $a'\alpha'$, $b'\beta'$, $c'\gamma'$, aux points α', β', γ', on élève des perpendiculaires sur xy, enfin on mène de a, b, c des parallèles à l, qui couperont les perpendiculaires susdites en α, β, γ.

Mais pour trouver l'ombre des points qui tombent dans le quart de spère creux, ainsi que cela est par exemple le cas pour le point d, on mènera sur le plan horizontal d' 4 parallèlement à l', on décrira avec le demi-diamètre pris à volonté, les demi-cercles $d'c'$, $d'b'$ et $d'k'$, on projettera les points c', b' et k', sur le demi-cercle adf, et particulièrement en c, b et k, on mènera par eux des lignes droites parallèles à xy; on projettera les points d'intersection 1. 2. 3. 4. du plan horizontal dans les lignes qui leur correspondent du plan vertical, et là on mènera par 1. 2. 3. 4. une courbe dans laquelle le quart de sphère sera coupé par le plan lumineux élevé perpendiculairement au-dessus de d' 4. Enfin si on mène par d une ligne parallèle à l, alors le point δ dans lequel elle coupe le quart d'ellipse, sera le point d'ombre de d. En répétant plusieurs fois cette construction on trouvera les ombres de tous les points que l'on voudrait prendre sur le plan vertical entre c et e. (Le demi-cercle adf se trouve touché dans le point e par la tangente st menée parallèlement à l.) La courbe $e\delta\gamma\beta a$ tracée par tous ces points ainsi trouvés sera l'ombre de l'arc ea de même que la ligne droite aa sera l'ombre de aa''.

§ 463. Si l'on se sert du procédé opératoire indiqué au § 368, on obtiendra alors par un moyen bien plus commode les points d'ombre dans le quart de cercle creux. A cet effet, on mène *oy* parallèlement à *l* et *ny* parallèlement à *l'*, on élève *on* perpendiculairement sur *xy*, et *op* perpendiculairement sur *oy*, on fait *op*=*qn* et on mène *yp*. Si l'on suppose après cela le triangle *opy* rabattu autour de *oy*, jusqu'à ce qu'il vienne se placer perpendiculairement sur *oyq*; alors *py* sera le véritable rayon lumineux L et l'angle *p yo* celui qu'il forme avec la surface du tableau du plan vertical. Pour trouver maintenant à l'aide de ce rayon lumineux l'ombre du point *d*, on mènera *df* parallèlement à *oy* ou *l*, on decrira sur cette ligne un demi-cercle, on mènera *dm* parallèlement à *py*, et on abaissera de *m* sur *df* une perpendiculaire, alors le point *δ* dans lequel elle coupe *df*, sera l'ombre du point *d*, comme cela a été montré dans le § 368. On pourra trouver de la même manière les ombres des autres points situés entre *c* et *e*, et la courbe d'ombre sera déterminée avec d'autant plus de précision que l'on répètera davantage ce procédé opératoire bien simple en lui-même. Mais pour trouver les points *α*, *β* et *γ*, la méthode indiquée au § 462 atteint mieux le but et doit être considérée comme préférable pour tous les cas de ce genre.

§ 464. Avec un peu de réflexion, on emploiera facilement d'autres méthodes, ainsi qu'on l'a dit § 462, selon que la niche a une position inclinée vers la surface du tableau du plan vertical, telle que *a' f'* forme avec *xy* un angle quelconque, ou bien si la niche a une position horizontale, telle que la ligne centrale *dα'* soit parallèle avec *xy*, mais que le quart de sphère, se trouve sur le côté d'où arrive le jour, ou bien si les rayons lumineux forment avec *xy* un autre angle, ou bien si la niche n'est pas terminée, par un quart de sphère, mais d'une toute autre manière, ou bien si *a' a' f'* au lieu d'être un demi cercle, est un segment de cercle ou même une portion d'ellipse ou toute autre courbe, etc.

§ 465. Dans le lavis de cette niche à l'encre de chine, l'ombre portée ainsi qu'on peut le voir par la *fig.* 144 II, sera la plus foncée vers les extrémités et surtout à l'endroit où elle passe sur la lumière la plus vive; elle sera fondue vers la gauche

et le haut, pour former une lumière de réflexion qui devra surtout être apparente en haut dans le quart de sphère, dans les environs de *k* jusqu'à *e*, parce que cette portion de la voute, reçoit un jour de réflexion, non-seulement du reflet de la partie éclairée de la niche, mais encore du sol ou repose cette niche. La surface plane qui entoure la niche, devra être tenue d'après le § 407, plus sombre que la portion éclairée de la surface concave, qui se trouve immédiatement contre celle-ci à gauche de *f g*, et à plus forte raison plus sombre que la lumière la plus vive. En effet les projections des rayons lumineux sur le plan horizontal forment avec la ligne *f' r* un angle de 45 degrés, au contraire, et avec l'arc *f'* 4 des angles qui se rapprochent d'avantage de l'angle droit. Cet angle devient près de 4 égal à 90 degrés, et à partir de là décroit de nouveau. La portion de la surface de la niche située dans le fond, au-dessus de *a'* 5', doit être tenue un peu plus sombre que les surfaces antérieures placées au-dessus de *c a'* et *f r*. On a déjà montré dans le § 305, que la lumière la plus vive sur une surface polie ne se trouve pas sur la ligne perpendiculaire élevée sur 4, mais que ce reflet existe plutôt vers le milieu de l'arc *a'* 4.

§ 466. *Problème.* — Une ouverture de forme cylindrique, existe sur le milieu d'un quart de sphère; trouver l'ombre portée qui se forme par là, sur la surface concave de la niche décrite dans le précédent problème, en admettant ici comme là, la même direction des rayons lumineux (*fig.* 145).

Solution. — On se représentera d'abord le demi-cercle *a og*, comme s'il était entier et on construira d'après le § 462, l'ombre portée *f k* 2 *w* qui commencera auprès de la tangente *t t* et qui suffisamment prolongée ira jusqu'à l'axe *o o'*. Après quoi, on s'occupera du demi-cercle *d' p' e'*, dont la ligne *e d* est la projection sur le plan vertical; on adoptera sur *d' p' e'* des points à volonté, on les projettera en *e d* et on cherchera leur points d'ombre. Il va sans dire qu'ici il faut faire abstraction des points *d'* et *e'*, ainsi que du point *p'* (dans lequel la tangente *p' r'* menés parallèlement à *l'* touche le demi-cercle). On voit aussi par cette figure que la courbe *d* 1 2 3 4, dans laquelle le quart de sphère est coupé sur le plan vertical par le plan lumineux élevé sur *d'* 4, produit deux points d'ombre *s*

et *s*, savoir : *∂* comme le point d'ombre de *d* et *s* comme celui de 1, parce que les deux points *d'* et 1 se trouvent sur le plan horizontal dans la projection *d'* 4 du rayon lumineux. On trouvera de la même manière *r* comme étant le point d'ombre de *p*, *u* comme étant celui de *e'* et en outre que la courbe *∂ r suk* menée par ces points comme étant la limite d'ombre produite par le demi-cercle *d e*.

Si d'autre part on mène de *m* une ligne parallèle à *l*, qui, prolongée, vienne couper en *m'* le quart d'ellipse *d* 1 2 3 4, alors *m'* sera le point d'ombre de *m* et la portion *d m'* de l'ellipse sera l'ombre de la ligne droite *d m*, parce que *d'* sera la projection de la ligne *dm*. Enfin on mènera, à partir de *m*, une courbe égale à *∂rsuk*, qui vienne couper celle-ci, et l'on obtiendra ainsi la portion de la limite d'ombre qui se trouve encore projetée par le demi-cercle supérieur *mn* sur le quart de sphère.

L'ombre *dq*, dans la surface cylindrique creuse *dmne* sera déterminée d'après le § 360.

§ 467. — Si dans ce problème les modifications que nous avons indiquées au § 464, trouvaient chacune séparément ou plusieurs à la fois, leur application ou bien si l'ouverture supérieure avait une toute autre forme, alors celle de l'ombre pourra changer, mais sa construction s'exécutera tout à fait d'après les principes et les règles que nous avons posés.

§ 468. — On n'a pas jugé à propos de donner pour ce problème une figure spéciale qui représente un lavis, attendu que ce lavis sera facile à exécuter sans un modèle, d'après les règles données et en tenant compte de ce qui a été dit au § 465.

§ 469. — *Problème.* — Construire l'ombre portée qui se forme sur la surface concave d'une niche de forme demi-circulaire, lorsque celle-ci est recouverte par une surface horizontale, qui se raccorde avec la surface cylindrique par une surface courbe et est elle-même percée par une ouverture rectangulaire ; enfin lorsque les rayons lumineux arrivent dans la direction de la diagonale d'un cube (*fig.* 146).

Solution. — Si on se représente d'abord que l'ouverture rectangulaire, D' *m' n'* F' n'existe point, alors on trouve les

points d'ombre *a*, *b*, *c*, *d*, *e* et *f*, des points A, B, C, D, E e F, en tant qu'ils tombent encore sur la surface cylindrique, en suivant les procédés indiqués au § 462. Au contraire, le point d'ombre *g*, projeté par le point G, et tombant sur la surface de raccordement, se trouve, en traçant sur le plan vertical, la courbe d'intersection correspondant à G' *g'*, qu'on coupe celle-ci par une ligne menée parallèlement à *l* de G en *g*. Si enfin on mène la tangente *tt* parallèlement à *l* qui touche le quart de cercle G I en H, alors *abcdefg*H sera la limite d'ombre produite par la ligne A H. Mais si l'on admet l'ouverture D' *m' n'* F', alors on obtiendra, comme cela se voit dans la figure *dm*, comme étant l'ombre de la ligne D' *m'*, *mon* comme étant celle de *m' o' n'* et *nf* comme étant celle de *n'* F'. On trouvera de même *kk' o' p' p*, comme étant l'ombre de K O P, et de cette manière la limite d'ombre cherchée sera obtenue.

Comme les projections *l* et *l'* des rayons lumineux forment dans le cas présent des angles égaux avec *xy*, alors la portion de la limite d'ombre qui est projetée par la ligne droite C G sera, d'après le § 362, un arc décrit avec E' A' du point E, pris comme centre, arc qui commencera en *c* et sera prolongé jusqu'à ce qu'il coupe la ligne A I.

Nous devons enfin encore noter que ce qui a été dit au § 467 et 468 trouve aussi son application entière ici.

§ 470. — *Problème.* — Au-dessus d'une niche qui a la forme de celle de la fig. 145, se trouve une niche plus petite, ayant la forme de la fig. 146 ; trouver l'ombre portée qui se produira sur les surfaces concaves, lorsque les rayons lumineux arrivent dans la direction de la diagonale d'un cube (*fig.* 147, I.)

Solution. — Comme la fig. 147 peut être envisagée comme étant la réunion des fig. 144, 145 et 146, alors l'ombre portée qui se formera ici sera aussi en général trouvée, en suivant les procédés opératoires indiqués pour ces mêmes figures. Mais pour arriver par une voie plus abrégée à tracer la limite de l'ombre portée sur le quart de sphère de la niche inférieure, on pourra, pour le problème en question, suivre dans la plupart des cas, et sans commettre en cela des fautes sensibles, la construction simple qui suit :

On fera $\alpha r = a\,\alpha$, on mènera la ligne *ar* comme étant la projection du rayon lumineux sur le plan vertical, et avec cette ligne une tangente *yz* à l'arc *hu*, tangente qui touchera le même arc en *n*; on reliera les points *r* et *n* sans construction préalable et à main libre par une ligne, en lui donnant la forme $\alpha\beta\gamma\delta e$ de la ligne limite de l'ombre portée trouvée dans la fig. 144, puisque l'on se représente le quart de sphère qui recouvre la niche comme étant complétement fermée, et ne présentant aucune ouverture, qui donne naissance à cette ombre sur la surface concave. Après quoi on mènera de *b* et *h* deux lignes droites parallèles à *a r*, de telle sorte qu'elles coupent en *q* et *o* la ligne courbe qu'on vient de tracer, et on dessinera de nouveau à main-libre la ligne courbe *qpo*, aussi d'après la forme de la ligne $\delta\,r\,s\,u\,k$ trouvée dans la fig. 145; l'on obtiendra ainsi la limite de l'ombre portée pour le cas où le quart de sphère aurait supérieurement une ouverture concentrique. Comme la niche représentée ici dans la fig. 147, se trouve recouverte par une autre niche plus petite, qui projettera également une ombre sur le quart de sphère; il faut, pour cette raison, que la forme de l'ombre portée entière apparaisse différemment que si la première niche était ouverte supérieurement. On cherchera donc d'abord l'ombre portée qui se forme dans la petite niche et que l'on trouve en menant d'après le § 469, *cl* parallèlement à *cg* sous un angle de 45 degrés, et à celle-ci la parallèle *d k* d'une longueur indéterminée et en décrivant, à partir de *c*, avec le rayon *bm* l'arc *k i*, en traçant la ligne *k l* d'après la forme de la ligne *abc* (*fig.* 146), et en prolongeant la courbe de *i* jusqu'au point de contact *f*. Ceci fait, on tracera, à partir du centre *m* de la petite niche et parallèlement à *a r*, la ligne *vm p*, qui coupera en *p* la ligne courbe *o p q* (produite par l'ouverture concentrique du quart de sphère), et on reliera *p* et *q* par une courbe *p x q*, qui sera une portion de l'ellipse correspondante qui a été représentée dans la fig. 145 par *d* 1 2 3 4. Conséquemment, *srqxpon* sera sur la niche inférieure la limite de l'ombre et *mlkif* celle sur la niche supérieure, et de plus *sr* sera l'ombre de l'arrête *a' a*, *rq* l'ombre de l'arc *ab*, *qxp* celle de la ligne droite *bv*, *po* celle l'arc de *m h*, et *on* celle de l'arc *h*

n. D'autre part, *m l* sera sur la niche supérieure l'ombre de l'arrête *vc*, *lk* celle de l'arc *cd* et *kif* celle des lignes *de f*.

§ 471. — Ainsi qu'on l'a déjà dit au commencement du § précédent, la construction que l'on vient de faire, sert à trouver par un procédé plus abrégé que celui que l'on suit ordinairement la limite de l'ombre portée, et c'est aussi pourquoi on a admis la direction des rayons lumineux employés en général pour les fig. 144, 145, 146 et 147 sous des angles égaux, afin que l'on soit mis à même de pouvoir utiliser pour la recherche de l'ombre portée dans la fig. 147, les lignes limites de l'ombre trouvées pour ces figures.

Mais si la direction des rayons lumineux dans la fig. 147 n'est pas conforme à celle des figures désignées, si en même temps on ne connaissait pas la forme de la limite de l'ombre, qui se formerait dans les fig. 144, 145 et 146, par suite de ce changement de direction ou si on ne se contentait pas de la construction décrite dans le § précédent, à l'aide de laquelle on ne parvient à trouver avec exactitude qu'un certain nombre de points principaux de l'ombre, mais que l'on veuille indiquer avec grande précision dans chacune de ses parties l'ombre portée à figurer; on devra alors rechercher pour cette figure, également d'après les règles connues, un point après l'autre, ce qui n'occasionnera point d'autres difficultés, attendu que d'après ces règles il sera tout-à-fait indifférent de savoir quels angles les projections des rayons lumineux forment sur le plan horizontal et sur le plan vertical avec la ligne de terre.

Il faut enfin encore remarquer que lorsqu'on donne à la niche dessinée dans la fig. 147 une position horizontale, telle que le point *e* de l'axe *es* se trouve placé sur le côté, d'où arrivent les rayons lumineux, qu'alors la limite de l'ombre conservera la forme figurée ici, mais que l'ombre même sera en haut et les portions éclairées de la surface courbe en bas, ainsi que cela devient très-promptement reconnaissable, si l'on dessine le plan horizontal correspondant, ainsi que cela a eu lieu pour la fig. 148, comme vue latérale à droite de la figure.

Si au contraire on donne à la fig. 147 une position hori-

zontale, telle que *e* vienne à se trouver à droite et *s* à gauche, et si l'on veut conserver la forme de la limite d'ombre dessinée ici, alors cela ne peut avoir lieu que dans le cas où les rayons lumineux au lieu d'arriver de gauche à droite arriveront de droite à gauche.

§ 472. — Nous ne ferons plus qu'ajouter que, pour le lavis de cette niche (fig. 147, II), le jour le plus vif doit être maintenu un peu plus sombre dans la niche inférieure que dans la supérieure, parce que celle-ci est plus rapprochée de l'œil que celle-là. Par ces mêmes raisons, il faut aussi en général maintenir l'ombre portée de la niche supérieure plus sombre que celle de la niche inférieure. Il faut faire ressortir d'une manière toute particulière sur cette niche inférieure la lumière réfléchie au-dessous de *bh*, afin que la partie sphérique se représente dans tout son effet et que cette partie de la niche se détache nettement et d'une manière tranchée du cylindre qui se trouve placé au-dessus.

§ 473. — *Problème.*—Trouver l'ombre portée qui se forme sur les surfaces concaves des niches décrites dans le § 470, lorsque celles-ci ont une position horizontale et que l'ouverture de forme demi-circulaire fait face aux rayons lumineux qui arrivent dans la direction de la diagonale d'un cercle (*fig.* 148).

Solution.—L'arc A' E' et la portion AGH de l'arrête comprise entre A jusqu'au point de contact H de la tangente TB (*fig.* 148, I), sont les lignes génératrices de la limite de l'ombre. Comme après cela la courbe E *a* est, d'après le § 360, l'ombre de l'arc A' E' et la ligne *af* celle de la ligne AF; il ne s'agit plus ici que de déterminer sur la surface concave l'ombre de FGH. A cet effet, on mènera A' *a'* parallèlement à *l'*, on décrira de O' pris comme centre avec les diamètres à volonté O' α', O' β', et O' γ' des demis-cercles, tels cependant que celui décrit avec O' α' touche la ligne A' *a'*; on mènera dan la projection à gauche par les points correspondants α, β, γ des lignes droites parallèles à xy, et on projettera les points d'intersection 1, 2, 3, 4 et 5 de la ligne A' *a'*, de la projection de droite dans la projection de gauche; ainsi, la courbe G 1 2 3 4 5 *f* sera la projection du plan lumineux A' *a'*, et si l'on

mène G g parallèlement à l, alors la ligne courbe $f\,g$ sera l'ombre de la ligne droite FG. D'autre part on mènera de g une ligne courbe vers le point de contact H, et alors g H se trouvera aussi déterminé comme étant l'ombre de GH ; et si l'on veut marquer plus exactement cette dernière courbe, on devra mener d'un point de la projection de droite, de q, par exemple une ligne parallèle à A' a' et répéter la construction indiquée pour la recherche du point g, afin de trouver le point d'ombre de Q. I B est l'ombre de I B sur le plus petit cylindre et $ba'\,m$ celle de B km.

Dans cette figure comme dans les précédentes, l'ombre s'étend chaque fois jusqu'à l'axe du cylindre. Mais il est évident que, si l'angle que forme le rayon lumineux avec l'axe xy, est plus petit ou plus grand que 45 degrés, que la largeur de l'ombre augmentera ou diminuera de même.

§ 474. — Le lavis de ces niches s'exécute d'après les règles données à ce sujet, ainsi qu'on peut s'en convaincre par l'examen de la fig. 148, II.

Pour la détermination du jour le plus vif, on mènera sur la projection de droite (*fig.* 1), la ligne O' P' parallèlement à l', et on construira dans la projection de gauche la ligne P p 4 3 2 1 rs. Le point f' dans lequel la ligne prolongée F f coupe la courbe, marque le lieu dans les environs duquel le jour sera le plus vif sur la surface concave.

Si les niches ont une surface polie, alors on pourra partager l'angle a' O' P en deux parties égales et déterminer d'après les § 298 et 300 la ligne de ce reflet.

§ 475. — S'il fallait dessiner et laver convenablement la fig. 149, on aura à observer les règles qui ont été prescrites dans le 4e chapitre, tant sur tracé du dessin que sur les teintes et nuances diverses dans les parties lumineuses et ombrées. Quant aux ombres portées, on doit seulement remarquer que celle qui est projetée par l'arc abc sur le fond de la niche, peut être promptement trouvée si on procède d'après la construction indiquée au § 341, en menant dans la fig. II d' δ' parallèlement à l', en élevant en δ' une perpendiculaire sur xy, en coupant cette perpendiculaire du point central d par une ligne $d\,\delta$ parallèle à l, et en décrivant avec $\delta\alpha = da$ un arc de cercle.

La fig. I est la projection verticale, la fig. II la projection horizontale ou la coupe horizontale suivant la ligne CD, et la fig. III est la coupe transversale suivant la ligne AB. La direction du rayon lumineux l'' pour cette dernière projection se détermine, ainsi que cela ressort de la fig. IV, d'après les règles indiquées au § 346 *a*, par les projections prises à volonté l et l' du rayon lumineux.

§ 476. — On a indiqué dans le § 116 la construction d'une *vis* (*fig.* 33). On peut maintenant voir par la fig. 150 comment on trouve l'ombre portée que projette l'arrête $a'\ b'$ du filet C sur le cylindre intérieur, lorsque les projections l et l' des rayons lumineux arrivent sur la projection horizontale et sur la projection verticale, suivant une direction admise à volonté. On a exécuté le lavis complet pour les parties désignées par D et E.

§ 477. — On peut voir dans la fig. 151 en A la construction des ombres, et en B le lavis complet d'un écrou, ainsi qu'on les a figurés dans le § 117 (*fig.* 34). Il résulte de la fig. 151 que $a'\beta$ est l'ombre de la portion $a\beta$ de l'arête ac; de même que $\beta'\gamma'$ est l'ombre de $\beta c'$, $\beta'\delta$ celle de $\beta d'$ et δh celle de $d'h$.

§ 478. — On peut d'autre part voir dans la fig. 152 comment le lavis complet du *cône* tracé dans le § 348 (*fig.* 116) peut être exécuté, en suivant les règles du 4e chapitre, lorsque la direction des rayons lumineux admise alors ne change point pour ce cas.

§ 479. — Si enfin on veut laver la sphère représentée dans la fig. 131 en IV, on détermine alors le lieu du jour le plus vif et la limite de l'ombre propre, ainsi qu'il a été dit dans ce paragraphe et dans les paragraphes suivants, on passe sur l'ombre une teinte assez forte et on enlève l'arête le long de la limite d'ombre dge. Quand tout est desséché on prépare une teinte plus claire, on se représente quelques ellipses placées parallèlement à $dgef$ vers p, ellipses que l'on peut aussi marquer légèrement au crayon. On en fera 4 à 6 à des distances égales sur une sphère de la grandeur de cette figure. Ces ellipses deviendront de plus en plus petites en se rapprochant du lieu le plus éclairé, et la plus petite autour du point

p devra être maintenu à la même distance de ce point que les autres le sont entre elles. Après quoi on passe la teinte claire sur l'espace compris entre la première ellipse tracée et la limite d'ombre, en même temps que sur une partie de cette ombre et on fond des deux côtés.

Lorsqu'elle sera sèche on passera de nouveau la même teinte sur l'espace qui a reçu précédemment une couche, et de plus sur l'étendue qui s'étend vers l'ellipse suivante, en même temps qu'on passe encore au-delà de la limite de l'ombre, et on fondera de nouveau des deux côtés. On continuera ainsi jusqu'à ce que l'on soit arrivé à la dernière ellipse, qui doit être lavée de telle sorte que la partie de la lumière la plus vive soit maintenue presque entièrement blanche. Par ce mode d'opérer, la sphère recevra la gradation naturelle des teintes représentées dans la fig. 153, et si par ce premier travail elle n'avait pas encore obtenu le degré de force désiré, on pourra renouveler cette opération une ou plusieurs fois, et en dernier lieu enlever avec le pinceau à demi desséché les taches qui seraient survenues.

Il faut encore en général remarquer dans le lavis de la sphère que le lieu de la lumière la plus vive ne doit pas affecter la forme d'un point, mais celle d'une petite surface lumineuse et c'est pour cela que l'on doit agir et laver doucement avec l'encre pâle le long de la portion de la circonférence qui se trouve sur la partie lumineuse de la surface sphérique, c'est-à-dire autour du point le plus clair.

Afin d'imiter le plus possible l'effet de lumière naturelle, il est bon de trouver sur la sphère le lieu de l'ombre la plus forte qui est celui de toutes les tangentes à la sphère parallèles aux rayons lumineux; on fera ressortir cette ombre tout le long de la demi-ellipse, c'est-à-dire en *g* (*fig.* 131, IV) par un ton de vigueur. Il faut cependant faire attention que la sphère d'ailleurs bien lavée ne perde point de son mérite en cet endroit là par un contraste trop dur de la lumière et de l'ombre; que loin de produire une arête, elle se fonde insensiblement avec le reste de la surface sphérique.

Le reflet de lumière qui dans la nature se montre toujours sur la sphère, doit aussi être suffisamment exprimé sur la fi-

gure, raison pour laquelle on ne doit jamais maintenir cette partie de l'ombre par trop sombre. Il devra cependant toujours être une ombre et par conséquent plus fort que les parties de la surface sphérique éclairées directement, lors même que celles-ci recevraient la lumière sous un angle très aigu.

Si la sphère à figurer a une surface polie, alors la lumière la plus vive ne sera pas un point p (*fig.* 131, IV), mais apparaîtra sous la forme du point brillant plus dans les environs de f et u. Car comme ce n'est pas plutôt un point qu'une surface éclairée, il n'est pas nécessaire de déterminer exactement ce point, et d'après ce qui a été dit on saura le trouver approximativement.

§ 480. — On procédera de la même manière pour le lavis du tore représenté dans la fig. 134, I. Dans la projection horizontale comme dans la coupe et la projection latérale, il est bon d'indiquer d'abord d'une manière plus forte la limite de l'ombre en la fondant vers les extrémités, de cette manière on se rapprochera davantage de la nature, et le dessin gagnera en clarté et en délicatesse.

§ 481. — Quoique l'on puisse terminer ici la série des problèmes sur le tracé des ombres et le lavis avec tous les degrés de lumière à l'aide de l'encre de Chine; il est bien entendu que leur nombre, ainsi que cela a déjà été dit dans le § 395, ne peut, en aucune façon, être considéré comme épuisé. On a dans ces problèmes parcouru les différents cas qui se rencontrent le plus souvent dans l'art du dessin géométrique, afin que par leur étude on soit mis à même de pouvoir aussi dans d'autres cas tracer et laver exactement les ombres des corps. Mais dans cette étude il sera toujours utile de les tracer soi-même afin d'atteindre par un exercice continu et une longue pratique l'expérience et l'habileté nécessaires pour la construction des ombres.

§ 482. — En dernier lieu, faisons encore remarquer ce qui suit sur le tracé des plans en général, et sur leur lavis en particulier : si l'on examine les plans des fig. 137 et suivantes, on trouve que l'on a tracé un nombre de lignes beaucoup plus grand que l'on aurait dû le faire d'après les règles. Car si, par exemple, on doit tracer le plan de la fig. 141, on ne pourra

rigoureusement représenter que le cercle qui donnera la base du cône, et rien de plus; et si on veut représenter cette figure vue d'en haut, on ne pourra voir que le contour du plateau qui le recouvre. Malgré cela on a dessiné ici dans une et même figure non-seulement le cercle de la grande base du cône, mais encore le contour du plateau et en même temps le cercle de la petite base; d'où il suit que cette figure ainsi représentée n'est vue ni d'en haut, ni d'en bas. Mais comme la construction que l'on est obligé de faire pour trouver les ombres, exige que l'on voie la projection de *toutes les lignes* qui déterminent la forme du corps dont on veut déterminer les effets d'ombre et toutes ses parties; il faudra dans les projections horizontales que l'on prépare dans ce but, tracer sur ce plan les projections de toutes les lignes nécessaires qu'elles appartiennent ou non au plan horizontal.

Si au contraire on ne voulait figurer sur les projections horizontales, que l'on trace pour la recherche des ombres, que les lignes qui sont nécessaires pour atteindre ce but; il faudrait alors figurer par des lignes ponctuées les autres lignes qui ne seraient point vues ni d'en bas ni d'en haut, mais qui sont indispensables pour la construction des ombres, comme cela a eu lieu pour la fig. 149, II.

§ 483. — Lorsque dans le cours de cet ouvrage l'on s'est trouvé dans le cas d'indiquer les effets de la lumière et des ombres sur les dessins tracés en projection horizontale, on l'a fait de telle sorte que les projections *l*, *l'* du rayon lumineux L a été la direction de la lumière pour toutes les ombres portées (comme cela a été le cas entre autres pour les fig. 132, 134 et 152). Mais comme les deux lignes *l* et *l'* suffisamment prolongées, finissent par se couper, il s'en suit que les ombres qui suivent cette direction prendront sur le plan de projection verticale et sur le plan de projection horizontale une position *inverse*. Cette direction inverse des ombres sur la même feuille est considérée par beaucoup de dessinateurs comme un contre-sens, et par cela même l'usage doit en être exclu dans les dessins d'architecture, de machines et d'artillerie.

Lorsque donc on doit figurer sur une feuille de papier plu-

sieurs vues d'un même objet, c'est-à-dire les plans, élévations et projections latérales, etc. ; on ne se servira pas ordinairement dans ce but, de la méthode appliquée à la fig. 149, mais d'après ce qui vient d'être dit plus haut, on donnera à toutes ces vues une position analogue et en même temps aux ombres une seule et même direction, afin d'obtenir par là sur la feuille entière de l'accord dans le lavis des différentes vues du même objet. Mais pour que le lavis puisse être fait de la sorte, il est nécessaire de bien se représenter dans le tracé de ces différentes vues, que la surface du tableau et les lignes visuelles qui la frappent perpendiculairement aussi bien que la direction des rayons lumineux restent dans une position invariable, que les différentes vues de l'objet à représenter résultent de ce que l'on donne à cet objet tantôt une position, tantôt une autre vers la surface du tableau, et qu'on dessine sur celle-ci ses projections, comme cela a déjà été indiqué au § 62 et 74. Par là les parties lumineuses dans les différentes vues se trouveront donc placées sur celles de leurs faces qui sont tournées vers les rayons lumineux qui dans toutes les vues arrivent sous des angles *égaux*, comme d'autre part, *toutes les ombres dans les différentes vues sont projetées dans une seule et même direction.* Pour le tracé des traits de force (§ 238), même dans un dessin purement linéaire, on s écarte aussi de cette méthode et on représente dans toutes ces vues les lign limites des corps placées au bas et à droite, par des lignes plus fortes (§ 74 et 243). Ces traits de force tiennent dans un dessin linéaire en quelque sorte lieu des ombres; et par suite, on représente de cette manière les lignes limites des corps qui, dans le lavis, seraient dans l'ombre. Si on ne voulait pas employer le mode de représeniation que l'on vient d'indiquer et tracer les ombres dans les différentes vues dans une direction inverse, il faudrait alors aussi, pour être conséquent, tracer dans un dessin linéaire les traits de force de la même manière et par suite on serait obligé de tracer sur une seule et même feuille les traits de force à droite et en bas dans la projection verticale; en haut et à droite, dans la projection horizontale, et à gauche et à droite dans la vue latérale. Il est évident que de cette manière la clarté d'un dessin laisse

beaucoup à désirer, aussi est-il plus convenable de conserver le mode de représentation que nous venons d'exposer, et d'exécuter le dessin de telle sorte que dans toutes les vues les traits de force se trouvent toujours sur les mêmes côtés, au bas et à droite.

§ 484. — Si on représentait sur une feuille de papier un corps en projection horizontale et en projection verticale, et si l'on voulait faire sur celles-ci une distribution des ombres et des lumières conforme à ce qui a été dit au paragraphe précédent; dans ce cas on se servira de la projection horizontale pour déterminer les ombres sur la projection verticale en suivant les indications de la méthode employée jusqu'ici. Pour trouver ensuite les ombres sur la projection horizontale, on devra en quelque façon envisager celle-ci comme étant une projection verticale, et la projection verticale elle-même comme étant la projection horizontale. On se servira de cette projection verticale pour déterminer les ombres sur la projection horizontale de la même manière que précédemment on s'est servi de la projection horizontale pour tracer les ombres sur la projection verticale. Seulement il y a encore à remarquer ici que la projection horizontale n'est pas dessiné *au-dessous*, mais bien *au-dessus* de la projection verticale, ce qui ne peut occasionner de différence dans la construction à employer. Si les rayons lumineux qui éclairent le corps avaient une direction telle que leurs projections sur la projection horizontale, formaient par exemple un angle de 60 degrés avec la ligne de terre et sur la projection verticale un angle de 40 degrés, dans ce cas, on déterminera d'abord d'après le procédé connu l'ombre portée et en général toutes les ombres de la projection verticale. Cela fait, pour trouver les ombres sur la projection horizontale, on donnera aux projections des rayons lumineux sur la projection verticale une direction telle, quelles forment avec la ligne de terre des angles de 60 degrés; mais on dessinera la projection de ces mêmes rayons lumineux sur la projection horizontale sous des angles de 40 degrés avec la ligne de terre, puisqu'on envisage celle-ci comme nous l'avons déjà dit, comme la projection verticale et celle-là comme la projection horizontale.

§ 485. — Afin de faciliter la construction à employer ici, il est convenable d'élever près du rebord gauche du papier une ligne perpendiculaire à la ligne de terre et de tracer contre celle-ci les angles de direction de la lumière sur la projection horizontale et sur la projection verticale, ce qui peut aussi servir ultérieurement comme lignes de direction pour le tracé des rayons lumineux. On comprend facilement que les angles que forment les projections des rayons lumineux avec cette perpendiculaire ne seront égaux aux angles qu'ils forment réellement avec la ligne de terre que lorsque les rayons lumineux arriveront eux-mêmes dans la direction de la diagonale d'un cube et qu'ainsi leurs projections formeront sur la projection horizontale et sur la projection verticale partout des angles de 45 degrés. Si cela n'est pas, il faut alors que les angles que forment les rayons lumineux sur ces projections avec cette perpendiculaire soient les compléments des angles, qu'ils font avec la ligne de terre.

Dans l'exemple admis, les rayons lumineux devront, dans la construction de l'ombre former dans la projection verticale avec la perpendiculaire tracée tout d'abord près du bord gauche du papier des angles de 50 degrés et dans la projection horizontale des angles de 30 degrés. Si l'on cherche ensuite les ombres pour la projection horizontale, on donnera aux rayons lumineux sur la projection verticale une inclinaison formant des angles de 30 degrés et sur la projection horizontale celle de 50 degrés avec la perpendiculaire, parce qu'alors la projection horizontale est prise pour la projection verticale et réciproquement.

§ 486.— Ce qui vient d'être dit pour la projection horizontale et la projection verticale est aussi applicable aux vues antérieures et latérales d'un corps. Ici aussi on se sert donc d'une des vues pour la détermination des ombres sur l'autre et on alterne de même les angles de direction des rayons lumineux ainsi qu'on l'a enseigné dans le § 484.

Afin donc que les ombres d'un corps puissent être trouvées dans toutes les vues sur la surface d'un tableau suivant *une même direction* et avec une forme égale, il est nécessaire d'envisager lors de la construction des ombres chacune des vues

sur laquelle on va construire et appliquer les ombres comme étant en quelque façon une projection verticale.

Afin de rendre plus sensible ce qui a été dit dans les §§ 483 et suivants, nous prendrons un exemple.

§ 487. *Problème.* — Soit A F. 154 I, un mur vertical, parallèle à la surface du tableau, et H M, la vue antérieure d'un corps à faces concaves placé perpendiculairement sur ce mur ont la grandeur sur la projection horizontale fig. II, est indiquée par h' h'. On doit trouver l'ombre portée que projette ce corps sur le mur dans la projection verticale, et celle que projette ce mur dans la projection horizontale sur une des faces concaves de ce corps; lorsque les rayons lumineux ont vers la surface du tableau une direction telle que leurs projections forment sur la projection horizontale des angles de 60 degrés et sur la projection verticale des angles de 50 degrés avec la ligne de terre $x\ y$.

Solution. — On cherchera d'abord l'ombre portée que projette le corps H M sur le mur placé perpendiculairement dans la projection verticale.

Pour cela on tracera, ainsi qu'on l'a enseigné dans le § 485, à gauche de la fig., la ligne $\alpha\ \gamma$, élevée perpendiculairement sur X Y, et les lignes $\alpha\beta$ et $\gamma\delta$, dans une position telle par rapport à cette ligne que la première forme avec elle un angle de 50 degrés, la dernière, au contraire, un de 30 degrés. On projette les points H, I et K, ainsi que les points P et L, sur la projection horizontale dans la ligne h' k'; alors K, k l m n o O sera l'ombre portée cherchée du corps sur le mur, lorsque d'après la construction connue les rayons lumineux seront menés sur la projection horizontale parallèlement avec $\gamma\ \delta$ et sur la projection verticale parallèlement avec $\alpha\ \beta$.

Comme les lignes courbes H I K, K L M, M N O et O P H, sont dans cette figure des arcs de cercle, dont les rayons sont tous égaux à H Q, et comme dans ce cas aussi leurs ombres doivent former avec eux des arcs égaux; on ne sera à la rigueur alors tenu que de déterminer les points d'ombres *h*, *k*, et *o*, et de décrire des points centraux *q*, *q' q''* et *q'''*, faciles à trouver avec les rayons qui y appartiennent (égaux à H Q) les arcs *h i k*, *k l m*, *m n o* et *o p h*.

Mais pour trouver l'ombre portée qui se forme dans la poojection horizontale, on euvisagera la projection verticale fig. I, comme étant une projection horizontale et la projection horizontale fig. II, comme étant la projection verticale, et on se représentera que H M, est la projection horizontale et *h' k'* la projection verticale d'un corps sur lequel est en saillie un plateau A' É' dont A B C D E indique l'étendue et la forme ; comme on l'a déjà dit, il est tout-à-fait indifférent que la projection horizontale soit dessinée comme dans ce dernier cas audessus de la projection verticale, ou qu'elle soit au-dessous comme dans les cas précédents. Mais comme d'après le problème actuel les rayons lumineux forment sur la projection horizontale, avec la ligne de terre des angles de 60 degrés et sur la projection verticale des angles de 40 degrés et que cette direction doit être maintenue dans toutes les vues à la surface du tableau ; on tracera en conséquence $\alpha\beta$ sous un angle de 30 degrés et $\gamma'\delta$ sous un angle de 50 degrés vers la ligne perpendiculaire $\alpha\gamma$, on déterminera sur la demi circonférence B C D les points *a'*, *b'*, *c'*, *d'* et *c'*, par les lignes menées de H, *s'*, I, *u'* et K parallèlement avec $\alpha\beta'$, on projettera les points *a'*, *b'*, *c'*, *d'* et *c'* sur la projection verticale qui y correspondent, c'est-à-dire, sur la ligne A' E', dans les points *a*, *b*, *c*, *d* et *e*, on mènera *s' f'* et *u' g'* perpendiculairement sur X Y et de *a*, *b*, *c*, *d et e*, on mènera des lignes parallèles avec $\gamma'\delta'$; et ainsi les points *r*, *s*, *t*, *u* et r, où ces lignes couperont les précédentes perpendiculaires se trouveront être les points d'ombre cherchés, et par suite la ligne *r*, *s*, *t*, *u*, *v* sera la limite de l'ombre, que la portion *a' e'* ou *a e*, projette sur le corps *h' k'*. On pourrait trouver ensuite d'après les § 483 et 484 l'ombre pour la projection verticale comme pour la projection horizontale.

§ 488. — Après que les ombres auront été déterminées sur la projection verticale et sur la projection horizontale, les deux vues seront lavées d'après les instructions indiquées dans le 4e chapitre.

Il est encore nécessaire de remarquer ici, qu'en général, le dessin gagne beaucoup en beauté et en précision si, dans les vues diverses, on cherche à établir une harmonie parfaite, un rapport exact des tons entre les surfaces qui, projetées sur le

même plan, selon leur plus ou moins d'éloignement. Ce rapport exact s'obtient assez facilement si on commence par appliquer sur les surfaces situées en avant et le plus près de l'observateur une teinte uniforme et si on donne aux autres surfaces situées plus en arrière, et cela d'après le procédé indiqué au § 406, des teintes plus sombres ; de telle sorte que dans les différentes vues on puisse déjà juger par la différence des teintes (si celle-ci sont bien graduées) des distances respectives des surfaces. D'après cela, il faudrait que dans la fig. 154 la surface H M reçoive dans la fig. I le même ton que reçoit, dans la fig. II, la partie de la surface convexe B' D', située au-dessus de C'. Mais le ton le plus clair de cette surface convexe ne se trouvera pas près de C' mais plus à gauche près de *c* ou *d*, ainsi que cela se voit facilement d'après l'arc correspondant B C D, (*fig. I*). Comme d'un autre côté C I, (*fig. I*), est plus petit que *h' h'*, (*fig. II*), le mur vertical A F de la fig. I, devra aussi être maintenu plus sombre que la surface *h' k'*, (*fig. II*), bien entendu, que *h' k'* étant une surface plane. Mais comme ces surfaces ont ici une forme concave, on devra faire attention dans leurs lavis aux règles qui se rapportent à ce cas. Conséquemment, la portion de la surface *h' k'* située à droite si par hasard elle se trouve située dans la lumière devra être maintenue plus claire, mais la partie à gauche sera tout aussi sombre, ou même un peu plus sombre que le mur A F, et les angles sous lesquels les rayons lumineux frappent l'arc H I K (*fig. I*), détermineront le rapport de ces tons de la surface *h'. k'* avec le ton du plan A F.

APPENDICE.

Nous croyons utile pour l'intelligence de cet ouvrage, et surtout pour la pratique, d'ajouter à l'enseignement de l'art du dessin que nous venons d'exposer, une récapitulation abrégée des principes et des théorèmes qui trouvent leur application en plus ou moins grand nombre presque dans tout dessin géométrique, tant au point de vue de leur représentation graphique que de leur lavis. Ces principes forment, en quelque façon, les bases des différentes méthodes de construction, à l'aide desquelles on produit sur une surface plane, les projections des corps qui sont placés dans l'espace, et ils fournissent d'un autre côté les règles nécessaires pour le lavis des dessins; et quoiqu'elles ne renferment et n'apprennent point de suite, ces constructions mêmes, il faut néanmoins que le dessinateur les connaisse et se les rappelle quand il doit les appliquer. Quoique ces principes aient été tous développés et approfondis le plus possible dans cet ouvrage, on devra cependant considérer leur récapitulation comme utile; puisque non-seulement elle fait revoir avec fruit ce qui a été dit, mais dispense encore de la recherche fatigante de ces principes disséminés dans le texte.

Résumé de l'étude des projections.

I.—On représente à l'aide d'un dessin géométrique la forme d'un objet telle qu'elle existe dans l'espace, et par un dessin en perspective telle qu'elle apparait à l'œil (§ 61).

II.—La projection d'un *point* est de nouveau un *point* (§ 64).

III. — Un point est *donné dans l'espace*, l'orsqu'on connaît sa distance à trcis plans coordonnés; et *dans un plan*, lorsqu'on connaît sa distance à deux lignes qui se coupent à angle droit ou à angle aigu (§ 71, *a*).

IV. — La projection d'une *ligne droite*, est un *point* lorsque celle-ci se trouve dans la direction des lignes génératrices et que par suite elle est placée perpendiculairement à la surface du plan de projection; elle est *égale* à la ligne donnée, lorsque celle-ci est parallèle à la surface du plan de projection et elle est *plus petite* que la ligne donnée, lorsque cette dernière a une position inclinée vers la surface des plans de projection (§ 65). Dans ce cas, la ligne donnée est à sa projection, comme le demi-diamètre est au cosinus de l'angle d'inclinaison.

V. — La projection d'une *ligne droite*, ne peut jamais être plus grande que cette ligne elle-même. (§ 66). Il va sans dire qu'il ne peut être question ici comme pour les autres problèmes que de projections sur des plans qui se coupent à angle droit. (§ 63).

VI. — La projection d'un plan perpendiculaire à la surface du tableau, est une *ligne droite*; elle est égale au plan donné, lorsque celui-ci est parallèle à la surface du tableau et elle est plus petite que le plan donné, lorsque ce dernier a vers la surface du tableau une inclinaison quelconque.

VII. — La projection d'une *courbe* est une *ligne droite*, lorsque cette courbe se trouve dans un plan perpendiculaire à la surface du tableau, mais si ce plan est parallèle ou incliné vers cette surface, alors cette projection sera une *courbe* qui dans le premier cas sera égale à la courbe donnée et dans le deuxième cas aura, au contraire, une forme qui deviera plus ou moins de celle de la courbe donné (§ 67, 101, 109).

VIII. — La projection d'une surface courbe apparaît sur le plan de projection sous forme d'une figure plane composée de lignes droites, courbes ou mixtes, suivant que le contour de la surface donnée engendre l'une ou l'autre de ces lignes dans la projection (§ 69).

IX. — La projection *d'un angle* peut être égal, plus petit ou plus grand, que l'angle donné lui-même (§ 89).

X. — Les projections *de lignes parallèles entre elles* sur un même plan de projection sont de nouveau des lignes parallèles, quelle que soit d'ailleurs leur position parallèle par rapport au plan (§ 88, 228).

XI. — La projection *d'un corps donné dans l'espace* est trouvée par la projection d'un système de points qui le déterminent sur le plan de projection (§ 70 à 94).

XII. — La projection *d'un cercle* est ou *une ligne droite*, une *ellipse* ou bien un cercle égal, suivant qu'il est perpendiculaire, oblique ou parallèle au plan de projection (§ 102).

XIII. — Les projections *des lignes courbes* qui appartiennent à la classe *des sections* coniques sont des courbes de la même espèce, lorsque ces courbes se trouvent sur des plans qui sont inclinés vers la surface du tableau sous un angle aigu. Par suite, la projection d'une ellipse est de nouveau une ellipse, la projection d'une parabole est une parabole et la projection d'une hyperbole est une hyperbole (§ 111, 137, 139, 142, 144). Toutefois la projection d'une ellipse peut aussi apparaître sous forme de cercle, lorsque le plan de l'ellipse et celui de la projection forment entre eux une angle de 45° (§ 138). Mais il résulte aussi du n° VII, que ces courbes peuvent apparaître dans la projection sous forme de lignes droites et de courbes de véritable grandeur.

XIV. — La projection d'*une ligne à double courbure*, ne peut jamais apparaître sous forme de ligne droite, mais sous celle d'un cercle ou d'un arc de cercle (§ 110).

XV. — Pour indiquer la projection des *lignes d'intersection*, qui existent pour des corps qui se coupent, il ne s'agit que de trouver les projections des points qu'on sait être situés à la fois sur les surfaces des deux corps qui se coupent, par suite, dans leurs lignes d'intersections communes (§ 189, 208).

XVI. — Lorsqu'on dessine sur une même feuille deux vues d'un objet, par exemple, la vue de face et celle de dessus, il faut dans les constructions que l'on fera, se représenter les deux plans coordonnés placés perpendiculairement l'un à l'autre, de telle sorte que ces deux plans se coupent à angle droit sur la base. On agira de même pour représenter trois vues en employant trois plans coordonnés (§ 78).

sultera, devra être représenté dans un dessin avec d'autant plus de précision que les surfaces courbes seront plus polies.

IX. — Les parties lumineuses d'un objet reçoivent leur jour des rayons lumineux qui les frappent directement, les *parties ombrées*, au contraire, sont éclairées par une lumière indirecte ou par le reflet.

X. — C'est aussi pourquoi les parties ombrées reçoivent sur un dessin, *une lumière inverse* à celle qu'elles recevraient, si les objets représentés étaient immédiatement atteints par les rayons lumineux (§ 293).

XI. — L'ombre portée doit, en général, être tenue plus sombre que l'ombre propre (§ 403).

XII. — Dans la construction des ombres, et en particulier dans la détermination de l'angle de direction des rayons lumineux, il faut se représenter la surface du plan de projection du plan vertical dans une position verticale (§ 319).

XIII. — Il faut sur un dessin destiné à être lavé, que toutes les surfaces qui appartiennent au corps figuré, reçoivent une teinte, même celles qui reçoivent la lumière perpendiculairement, ou le reflet plus vif où qui se trouveraient plus près de l'observateur (§ 309).

XIV. — La lumière de réflexion ou le reflet, n'a *aucune* influence sur les parties éclairées d'un dessin géométrique (§ 292).

XV. — Pour marquer dans un dessin l'ombre d'un point quelconque, il est nécessaire de connaître la plus courte distance de ce point, à deux plans coordonnés, ainsi que les projections du rayon lumineux qui le frappent dans ces deux vues (§ 324).

XVI. — Comme dans l'ombre d'un corps éclairé, il ne peut pas y avoir d'autre ombre, de même, on ne pourra pas non plus rendre dans un dessin géométrique l'ombre qui est projetée par un ou plusieurs corps l'un sur l'autre, plus sombre que si elle n'était produite que par un seul corps (§ 405, 427).

Quoique ce ne soit que vers la fin du siècle dernier, que Monge le premier, ait classé d'une manière complète, les leçons de la géométrie descriptive et en ait formé une nouvelle branche des mathématiques, il n'en est pas moins vrai que longtemps déjà avant cette époque, cette étude ainsi que les méthodes de construction, étaient déjà connues, partiellement il est vrai; on n'en peut douter, en voyant les constructions ingénieuses des anciens, les machines et autres objets techniques de ces temps. Toutefois, ces études étaient ou traditonnelles et se transmettaient du maître à l'élève oralement, ou bien elles se trouvaient disséminées dans des traités spéciaux, dans lesquels on trouvait des méthodes de constructions particulières pour des cas spéciaux, tels par exemple, que des préceptes donnés au maçon, pour la coupe des pierres, au charpentier, pour la construction d'un escalier, ou au constructeur de moulins, pour l'établissement des roues etc. Aussi, ces préceptes isolés se trouvaient en partie très longs, peu clairs et empiriques; d'autrefois trop courts, et conçus dans un but théorique qu'on appliquait sans trop s'inquiéter de leur rapport scientifique.

Le service rendu par Monge, consiste en ceci, c'est qu'il a réuni les différents préceptes et procédés opératoires, les a perfectionnés et les a classés, y a ajouté des lois nouvelles, intéressantes, ingénieuses et très importantes, a réuni le tout en un système qu'il a élevé à la hauteur d'une science. Ses élèves et ses continuateurs ont suivi en général le chemin tracé par lui, ont étendu encore en France par leurs écrits, le cercle des connaissances et le progrès de la géométrie descriptive si utile aux arts et métiers.

Toutefois, longtemps déjà avant cette époque, on connaissait en Allemagne, les préceptes de la géométrie descriptive et on en trouve la preuve dans ces monuments qui se sont élevés au moyen-âge, sur différents points de l'Allemagne. On savait alors fort bien de quelle importance étaient pour l'artiste et l'ouvrier, la connaissance de cette étude et de ces constructions. On peut se convaincre de l'importance qu'elles offraient alors pour le dessin, par un écrit d'Albert Durer, de l'an 1525, adressé à son ami Willibald Berkenheyner auquel il dédia même un ouvrage relatif à ce sujet. Il ne sera peut-être

pas sans intérêt de donner en finissant l'extrait suivant de cet ouvrage.

« Jusqu'à ce jour, dans notre pays d'Allemagne, dit-il, l'on a « destiné à la peinture, beaucoup de jeunes gens habiles, qui, « n'ayant point reçu tous les principes et la pratique néces- « saire, ont grandi dans cette ignorance, comme un arbre mal « soigné et sans culture. Plusieurs cependant, ont acquis par un « exercice persévérant, une main assez habile pour produire « des œuvres puissantes, mais exécutées sans réflexion et d'a- « près leur bon goût seulement. Mais des peintres instruits et « de véritables artistes ont avec raison plaisanté l'ignorance « de ces jeunes gens, car un homme raisonnable ne trouve « rien de plus désagréable à voir que des dessins faux, quoiqu'ils « aient été faits avec le plus grand soin. C'est parce que ces « peintres, se sont complus dans ces erreurs, qu'il est néces- « saire de rechercher la cause, pour laquelle ils n'ont point « étudié l'art des proportions mathématiques, sans lesquelles « il est impossible de devenir un bon artiste ; il faut à vrai dire « adresser ce reproche à leurs maîtres qui eux-mêmes n'a- « vaient pas appris cet art.

« Attendu que cet art des proportions est la base réelle « de toute peinture, je me suis proposé de présenter à ceux « qui seraient avides de son étude des, principes pour qu'ils « puissent s'exercer eux-mêmes a bien manier le compas et la « règle, arriver à des jugements vrais et sans se passionner « exclusivement pour l'art.

« Il est suffisamment démontré par les écrits des Grecs et « des Romains, qui, après avoir été longtemps perdus, ont re- « paru au jour que depuis deux siècles, en quel honneur et « estime était l'art chez ces peuples. Les arts se perdent faci- « lement, et on ne les retrouve qu'avec peine et après un long « espace de temps. J'espère donc, que tout homme raisonna- « ble, ne critiquera pas mon entreprise, parce que je le fais « dans une bonne intention, et que j'espère être profitable à « tous ceux qui désirent s'instruire, elle sera profitable non- « seulement au peintre, mais encore au ciseleur, au statuaire, « au sculpteur, à l'orfèvre, et à tous ceux qui se servent des « proportions.

« Du reste, personne n'est forcé de faire usage de ce que « j'enseigne ; mais je suis convaincu que celui qui s'en servira « n'en retirera pas seulement un premier fond d'étude, mais « arrivera encore par un usage journalier à une grande intel- « ligence.

FIN.

